

Lezioni di

ROBOTICA,

&

VISIONE ARTIFICIALE

Dispense per il corso



Prof. Ing. Domenico PRATTICHIZZO

Ing. Gian Luca MARIOTTINI (Ph.D. Student)

SIRS Lab - Dipartimento di Ingegneria dell' Informazione

Indice

1	Introduzione: I robot e la robotica	1
1.1	Introduzione	1
1.2	I robot e la robotica	1
1.3	Il robot industriale	4
1.3.1	Componenti e struttura del robot industriale	6
1.3.2	Alcuni criteri di confronto fra diversi manipolatori	11
1.3.3	Tipologie strutturali dei manipolatori	12
2	Cinematica dei corpi rigidi	19
2.1	Introduzione	19
2.2	Rotazioni	19
2.2.1	Regola della mano destra	24
2.2.2	Rotazioni di base	26
2.3	Composizione di rotazioni	29
2.3.1	Rotazioni rispetto ad una terna fissa	30
2.3.2	Rotazioni attorno ad un asse arbitrario	31
2.4	Rappresentazione di una Rotazione Arbitraria	33
2.4.1	Rappresentazione Asse/Angolo	33
2.4.2	Rappresentazione con Angoli di Eulero	35
2.4.3	Angoli di Roll-Pitch-Yaw	36
2.5	Trasformazioni omogenee	37
2.6	Matrici skew-simmetriche	47
2.6.1	Proprietà delle matrici skew-simmetriche	48

2.6.2	Derivata della matrice di rotazione	49
2.7	Conclusioni	50
3	Convenzione di Denavit-Hartenberg, Inversa e differenziale	51
3.1	Cinematica Diretta	51
3.1.1	Convenzione di Denavit-Hartenberg	53
3.1.2	Cinematica di alcuni manipolatori	56
3.2	Cinematica Inversa	62
3.3	Cinematica Differenziale	63
3.3.1	Velocità angolare & accelerazione	64
3.3.2	Addizione di velocità angolari	66
3.4	Lo Jacobiano di manipolatori	68
3.4.1	Derivazione dello Jacobiano	68
3.4.2	Velocità Angolare	69
3.4.3	Velocità Lineare	70

2.2	<i>Il punto \mathbf{p}_1 espresso nel sistema di riferimento \mathcal{S}_1, può essere espresso anche nel sistema \mathcal{S}_0.</i>	21
2.3	<i>Rotazione attorno all'asse z_0</i>	24
2.4	<i>La regola della mano destra</i>	25
2.5	<i>La regola della mano destra vale ancora per altre terne, come quella qua rappresentata</i>	26
2.6	<i>Rotazione dal sistema \mathcal{S}_0 al sistema \mathcal{S}_1 di un angolo θ.</i>	27
2.7	<i>Rotazione dal sistema \mathcal{S}_0 al sistema \mathcal{S}_1 di un angolo θ attorno all'asse x.</i>	28
2.8	<i>Rotazione rispetto ad un asse arbitrario: esempio</i>	31
2.9	<i>Rotazione rispetto ad un asse arbitrario: esempio</i>	31
2.10	<i>Rotazione attorno al vettore \mathbf{k} (asse arbitrario)</i>	32
2.11	<i>Rappresentazione degli angoli Roll-Pitch-Yaw (Rollio-Beccheggio-Imbardata).</i>	37
2.12	<i>Il vettore \mathbf{d}_0^1 rappresenta una traslazione che porta punti dal sistema \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_0.</i>	38
2.13	<i>Notazione con versori nsa.</i>	41
2.14	<i>Esempio di trasformazione omogenea</i>	42
2.15	<i>Esempio di trasformazione omogenea con applicazioni alla cinematica dei manipolatori antropomorfi</i>	43
2.16	<i>Esempio 10</i>	45
2.17	<i>Esempio 9</i>	46
3.1	<i>Convenzione di Denavit-Hartenberg.</i>	53
3.2	<i>Esempio Es. 3.1.2</i>	57
3.3	<i>Esempio Es. ??</i>	58
3.4	<i>Esempio Es. 3.1.2</i>	59
3.5	<i>Esempio Es. 3.1.2</i>	60
3.6	<i>Spostamento dell'end-effector a causa del moto di i.</i>	71

Capitolo 1

Introduzione: I robot e la robotica

1.1 Introduzione

La robotica ha radici antichissime; l'uomo ha infatti avuto sempre il desiderio di infondere la vita nei suoi artefatti e la mitologia greca ne è un esempio: Efesto forgiò il gigante Talo, Prometeo plasmò l'intero genere umano dalla creta. Heron di Alessandria, vissuto nel *III* sec. a.C. ed esperto di scienza meccanica scrisse un trattato, giunto fino a noi, sull'arte di fabbricare automi. Anche gli Egizi si cimentarono con giocattoli semoventi. Al museo Von Oudheden di Leyda, in Olanda, si conserva un manufatto originale risalente al 1300-1200 a.C. rappresentante un uomo che impasta della farina e capace di muoversi tirando una cordicella.

Nell'era industriale ad una creatura meccanica (*automa*) è però affidato il compito di sostituire l'uomo in mansioni di lavoro subordinato.

Lo scopo di questo capitolo introduttivo è allora quello di dare una esauriente panoramica della moderna robotica per poi descrivere la struttura dei manipolatori più diffusi.

1.2 I robot e la robotica

Il termine *robot* deriva dal ceco "ROBOTA" (*lavoratore*), introdotto per la prima volta nel 1920 dal commediografo Karel Capěk. Vent'anni più tardi lo scrittore Isaac Asimov coniava le 3 famose Leggi Fondamentali della Robotica, dettando un'etica

per dei robot dalle sembianze umane, ma privi di sentimenti: si trattava, chiaramente, di visioni futuristiche.

Solo negli ultimi anni però la distanza tra realtà e “science fiction” si è accorciata.

La Honda ha di recente prodotto il *robot antropomorfo Asimo*, capace di affer-

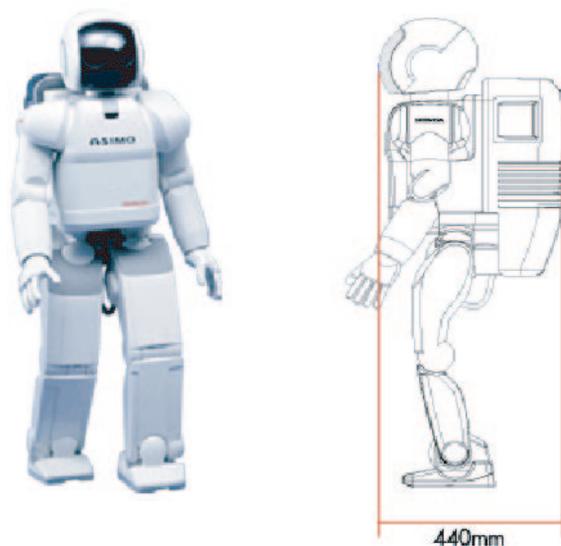


Figura 1.1: *Il robot antropomorfo ASIMO è capace di muovere le mani, la testa, etc. e di salire fluidamente le scale, grazie ad un sofisticato meccanismo di bilanciamento del baricentro.*

rare oggetti e scendere addirittura le scale grazie ad un sofisticato meccanismo di bilanciamento del baricentro (1.1).

Anche la multinazionale giapponese Sony ha di recente realizzato il cane-robot **AIBO** (1.2) con minori potenzialità dell'avversario di casa Honda, ma con un mercato target più ampio. Grazie ad ulteriori innovazioni, come il movimento delle orecchie (grazie a dei piccoli motorini elettrici) o il riconoscendo del proprio nome, la ditta giapponese spera di migliorare ancora di più la sua creatura.

Entrambi i robot sono accomunati dall'utilizzo di un avanzato sistema di Visione che permette loro di studiare l'ambiente esterno e ricavarne utili informazioni.

Casi eclatanti a parte, lo studio della robotica sia in campo accademico che industriale ha consentito lo sviluppo di robot sempre più sofisticati, utili sia socialmente (nel campo della chirurgia, ad esempio) che scientificamente.



Figura 1.2: *Il cane AIBO della SONY.*

La missione *Pathfinder* ne è stata forse l'esempio primo : nel 1997 iniziava l'esplorazione del suolo marziano da parte del robot mobile **Sojourner** (1.3) capace di analizzare rocce, scattare foto e spedire i risultati agli scienziati della NASA (sulla Terra) tramite una stazione fissa. Sono seguiti altri due lanci di sonde analoghe



Figura 1.3: *Ecco il Sojourner fotografato sul suolo marziano*

verso zone di Marte in cui sono state rinvenute tracce di acqua capace di dar vita a primitivi microorganismi.

Questo forte boom tecnologico è stato possibile anche grazie al consolidato utilizzo dei robot industriali negli ultimi decenni.

Secondo il R.I.A. (Robot Institute of America) il **robot** è un *manipolatore multifunzionale e riprogrammabile capace di movimentare materiali, pezzi, attrezzi o dis-*

positivi specializzati per mezzo di movimenti variabili programmati, per l'esecuzione di diversi compiti (tasks).

Si può affermare che la **robotica** ha come obiettivo lo *studio di macchine che possano sostituire l'uomo nell'esecuzione di un compito, sia in termini fisici che decisionali.*

Chiaramente allo stato attuale della ricerca è quasi impossibile trovare un robot con forti capacità esecutive e con l'autonomia necessaria a muoversi in ambienti non strutturati o scarsamente strutturati.

Con il termine **robotica avanzata** si intende la scienza che studia quei robot con spiccate caratteristiche di autonomia, le cui applicazioni sono concepite per risolvere problemi di operatività in ambiente ostile (spaziale, militare, sottomarino, ecc.).

Se però si suppone che il robot possa muoversi in un ambiente fortemente strutturato, come ad esempio in ambito industriale, allora si è soliti parlare di **robotica industriale**.



Figura 1.4: *Robot industriale all'opera*

1.3 Il robot industriale

Il termine **automazione industriale** indica quella *disciplina che studia le tecnologie e le metodologie volte ad utilizzare i sistemi meccanici, elettronici ed informatici per il controllo dei flussi di energia, di materiali e di informazione necessari alla realizzazione di processi produttivi industriali.*

1.3. Il robot industriale

L'automazione è nata con il principale scopo di sostituire l'uomo in compiti ripetitivi o nocivi, con apparecchiature in grado di operare in modo autonomo o con minimi interventi da parte dell'operatore umano.

Negli anni '60 ebbe inizio la diffusione rapida del processo di automatizzazione in molti settori della produzione industriale, mentre solo recentemente sono state estese anche all'agricoltura, all'edilizia, alla sanità, ecc.



Figura 1.5: *Utilizzo di manipolatore in una catena di montaggio*

L'importanza della robotica deriva da una molteplicità di fattori tra cui:

- il miglioramento della qualità dei prodotti;
- la riduzione dei tempi, dei costi, degli scarti di lavorazione con conseguente risparmio di energia;
- la flessibilità degli impianti, intesa come la possibilità di usare lo stesso impianto per più prodotti.

Alcuni esempi di automazione sono: i sistemi di controllo dei processi, le macchine a controllo numerico, le macchine per l'assemblaggio di componenti e per la movimentazione di pezzi, sistemi informatici per il monitoraggio ed il controllo della produzione, per la gestione dei magazzini, etc.

L'automazione è pertanto la sintesi delle tecnologie industriali proprie del processo di produzione e delle tecnologie informatiche e deve consentire anche la gestione efficiente delle informazioni.

I tre livelli di automazione a cui si può fare riferimento sono i seguenti:

1. L' **automazione rigida**, o **monoscopo**: questo tipo di automazione, propria di un conteso di fabbrica con una sola tipologia lavorativa, mira all'ottimizzazione dei tempi e dei volumi di produzione. Si utilizzano di solito macchinari di tipo "special purpose" per automatizzare una sequenza fissata di operazioni (1.5).
2. L' **automazione programmabile**: si inserisce in un contesto di fabbrica orientato alla produzione di piccoli e medi lotti di manufatti con caratteristiche variabili. Consente di variare la gamma di prodotti finiti grazie ad un sistema di automazione programmabile tramite il quale è possibile alterare facilmente la sequenza di operazioni da eseguire sul manufatto.
3. L'**automazione flessibile**: è l'evoluzione di quella programmabile e permette la produzione di lotti variabili di manufatti diversi così da eliminare i tempi morti dovuti alla riprogrammazione di sequenze di operazioni per passare da un lotto al successivo.

Secondo la definizione data dal R.I.A., il robot industriale offre caratteristiche di riprogrammabilità e flessibilità.

1.3.1 Componenti e struttura del robot industriale

I *componenti di base* di un robot sono:

manipolatore : è la struttura meccanica del robot stesso e consiste di bracci, connessi l'un l'altro per mezzo di giunti, e di un organo terminale (detto "end effector").

sensori : servono a misurare la posizione del robot, tramite degli *encoders*.

1.3. Il robot industriale

attuatori : sono gli organi, in genere elettrici o idraulici, che attuano il movimento del robot.

controllori : esercitano un feedback sui movimenti del robot.

interfaccia utente/robot : serve per programmare il robot.

unità di conversione dell'energia : è la sorgente esterna di potenza (batterie, alimentazione, celle solari, ecc.).

Le parti principali che si possono distinguere in un robot però sono essenzialmente 2:

A. Il **sistema di programmazione e controllo**: è un dispositivo di calcolo sofisticato composto da un multiprocessore in rete con altre risorse locali, con capacità di controllo, monitoraggio e immagazzinamento dati e atto ad eseguire le seguenti operazioni:

- *interagire con l'operatore,*
- *immagazzinare i dati,*
- *controllare i giunti in tempo reale,*
- *monitorare i sensori,*
- *interagire con altri macchinari,*
- *pianificare i movimenti del manipolatore.*

B. Il **manipolatore**: è la parte meccanica vera e propria ed è costituito dai seguenti componenti (1.6):

- *una base fissata nell'ambiente di lavoro, o su una piattaforma mobile,*
- *“links”, cioè corpi rigidi di collegamento,*
- *giunti, cioè degli snodi che connettono i links,*
- *“end-effector”, cioè l'organo terminale, connesso al manipolatore tramite un polso, che gli permette di muoversi liberamente con un orientamento arbitrario*

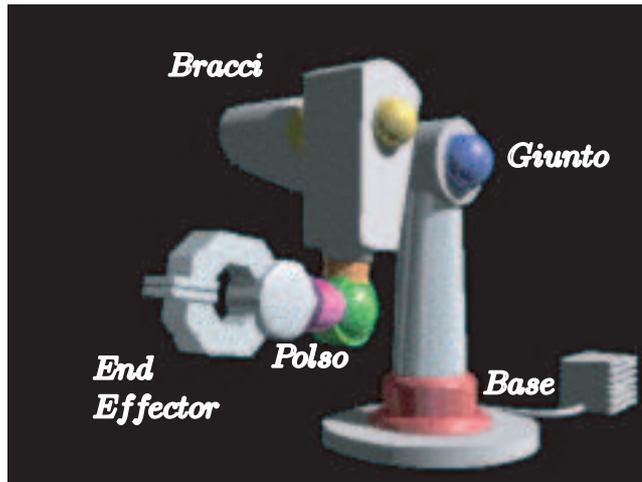


Figura 1.6: Componenti di un manipolatore industriale

Nelle sezioni seguenti verranno analizzate in dettaglio le parti caratteristiche del manipolatore.

I GIUNTI

Si possono distinguere fondamentalmente due tipi di giunti, *rotoidali* e *prismatici*, come indicati in Fig.1.7. Ogni giunto realizza l'interconnessione fra due collegamenti

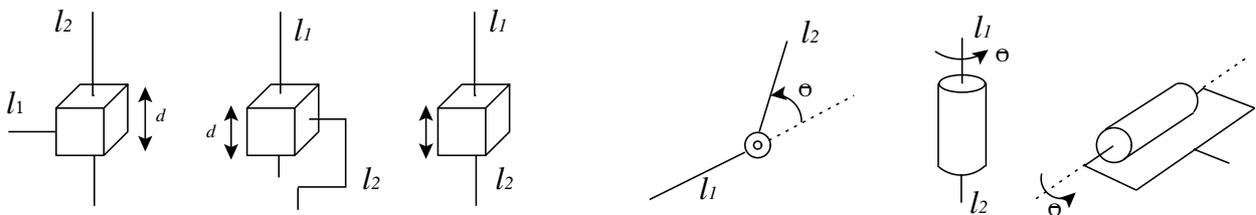


Figura 1.7: Giunti prismatici

Giunti Rotoidali

(links) indicati con l_i e l_{i+1} . Le variabili dei giunti che rappresentano il relativo spostamento tra i links sono:

$$\begin{cases} \theta_i & \text{se il giunto è rotoidale} \\ d_i & \text{se il giunto è prismatico} \end{cases}$$

Come precedentemente accennato, i giunti sono di solito attuati elettricamente o idraulicamente.

Il numero dei giunti di un manipolatore ne determina il suo **grado di libertà** (D.O.F, “degree of freedom”). Tipicamente un manipolatore deve possedere almeno 6 DOF indipendenti: 3 per il posizionamento e 3 per l’orientamento. Nel caso in cui $DOF = 6$, il manipolatore è detto *diretto* in quanto non può raggiungere, con orientamento arbitrario, tutti i punti nel suo spazio di lavoro. Se però $DOF > 6$, si dice che il manipolatore è *ridondante*.

Con il termine **spazio di lavoro** si indica il *volume totale raggiungibile dal manipolatore in una qualsiasi configurazione*.

END-EFFECTOR

L’ End-effector è il dispositivo con cui il manipolatore può interagire con l’ambiente (una pinza con la quale afferrare gli oggetti, una ventosa per trasportare lastre di vetro, etc.).

I compiti svolti dall’end-effector sono: afferrare oggetti, verniciare, saldare, assemblare parti, ecc. Per questa ragione si tratta di un dispositivo molto specializzato e, quindi, “poco flessibile”, cioè in grado di svolgere pochi compiti, dotato di scarsa sensorizzazione e semplice struttura cinematica.

Solo recentemente si è assistito a progetti (commercialmente ancora in fase embrionale) per aumentare la sensorizzazione dell’end-effector fino ad arrivare ai risultati di Fig.1.8.



Figura 1.8: *Un end-effector dell’ultima generazione.*

Se l’applicazione lo richiede, si deve essere in grado di cambiarlo rapidamente e

con facilità. In alcuni casi esiste un vero e proprio magazzino di end-effector, raggiungibile direttamente dal manipolatore che può così depositare il vecchio strumento, prenderne uno nuovo e svolgere altre fasi di lavorazione.

IL POLSO

E' un dispositivo collegato all'estremità mobile del manipolatore per orientare l'end-effector nello spazio di lavoro. Al fine di garantire orientamenti arbitrari in uno spazio tridimensionale, il polso deve possedere almeno 3 DOF realizzati da giunti di tipo rotoidale.

Poichè il polso costituisce la parte terminale del manipolatore, ad esso sono richieste caratteristiche di compattezza che ne rendono difficoltosa la progettazione.

La migliore soluzione costruttiva è quella in cui i tre assi di rotazione si intersecano in un solo punto: in questo caso si parla di *polso sferico* (Fig.??).

L'importanza del polso sferico sta tutta nella possibilità di semplificare l'analisi cinematica permettendo di disaccoppiarne la posizione dall'orientamento fino, al suo limite massimo.

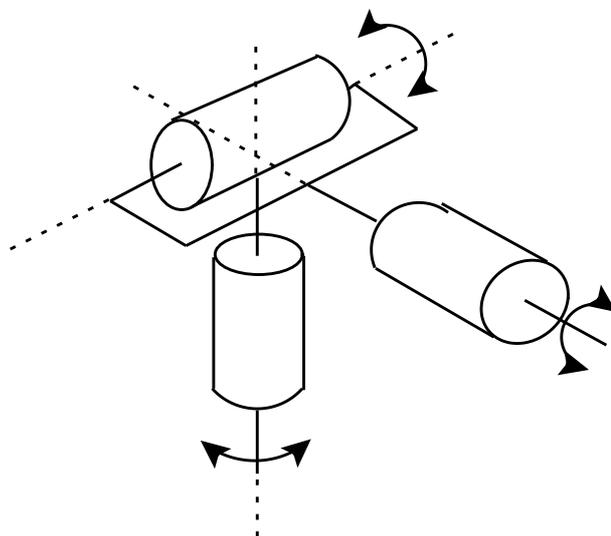


Figura 1.9: Schematizzazione di un polso sferico

Un discorso a parte va fatto per le cosiddette *configurazioni singolari*, cioè quelle configurazioni nelle quali si perde la capacità di orientare l'end-effector lungo una

certa direzione : una volta giunti in questa configurazione non è più possibile svolgere alcuni movimenti. Ecco allora che, per evitare tale inconveniente, vengono introdotti più gradi di libertà al manipolatore: così facendo non si eliminano le configurazioni singolari (che continuano comunque ad esistere), ma si cerca di evitarle.

1.3.2 Alcuni criteri di confronto fra diversi manipolatori

- SPAZIO di LAVORO

Con il termine *spazio di lavoro* si intende il volume raggiungibile dal manipolatore in una sua qualsiasi configurazione. Chiaramente questo dipende dalla configurazione geometrica del manipolatore stesso, dalla dimensione dei links e dai limiti meccanici di alcuni giunti.

In alcuni casi si è soliti riferirci allo spazio di lavoro come ad un sottoinsieme dello spazio raggiungibile, ed in particolare si fa riferimento all'insieme dei punti che il manipolatore può raggiungere, mantenendo comunque la capacità di orientare arbitrariamente la propria estremità; generalmente si è soliti dividerlo in:

- *spazio di lavoro raggiungibile* , ossia l'intero set di punti raggiungibili dal manipolatore.
- *spazio di lavoro destro* , che consiste in tutti quei punti che il manipolatore può raggiungere con un orientamento arbitrario dell'end-effector.

- CARICO UTILE o CARICO PAGANTE

Si intende il carico massimo totale, costituito sia dall'organo di presa che dall'oggetto trasportato, che il manipolatore è in grado di movimentare senza ripercussioni sulle prestazioni (da pochi Kg. a diversi quintali).

- PRECISIONE e RIPETIBILITÀ

Con il termine *precisione* si indica la capacità del manipolatore di raggiungere un punto preassegnato nello spazio di lavoro con un errore minimo.

Con *ripetibilità* si intende la capacità di raggiungere, durante le diverse fasi di lavorazione, una stessa posizione ripetendo gli stessi movimenti.

Per capire meglio la differenza tra *precisione* e *ripetibilità* si può osservare lo schema seguente:

Queste due misure sono solitamente definite con riferimento alla situazione più sfavorevole di funzionamento.

Tra le due la più importante è la ripetibilità in quanto errori di precisione possono essere facilmente compensati in fase di programmazione.

- **RISOLUZIONE**

É l'ampiezza del minimo spostamento eseguibile ed è un parametro importante per lavori di precisione come assemblaggi e manipolazioni.

L'espressione matematica che la descrive è la seguente:

$$R_{is} = \frac{d_{tot}}{2^n}; \quad n \equiv \text{"num. bit di accuratezza"};$$

Il numero di bit di accuratezza dipende chiaramente dall'accuratezza degli encoder posti nei giunti o sull'albero motore.

1.3.3 Tipologie strutturali dei manipolatori

Per la costruzione di un manipolatore possono essere adottate diverse tecnologie geometriche. Le più comuni sono:

- Configurazione cartesiana
- Configurazione cilindrica
- Configurazione polare e sferica
- Configurazione SCARA
- Configurazione antropomorfa

Di seguito saranno presentate le caratteristiche di base delle tipologie sopra elencate, mostrandone pregi e difetti anche alla luce dei criteri di confronto introdotti nel paragrafo precedente.

Configurazione cartesiana

La geometria cartesiana è realizzata con tre giunti prismatici con assi usualmente ortogonali tra di loro. Per la semplicità della geometria, ad ogni grado di mobilità

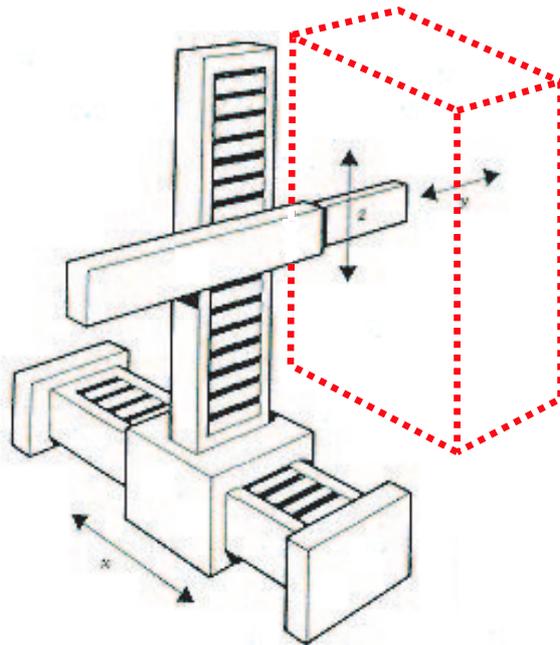
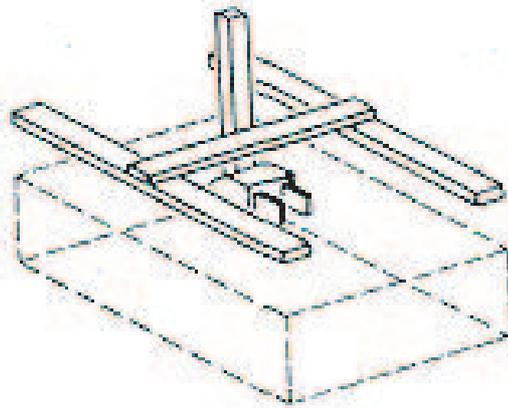


Figura 1.10: *Un manipolatore cartesiano ed il suo spazio di lavoro.*

corrisponde un grado di libertà dello spazio cartesiano e pertanto è immediato realizzare percorsi rettilinei nello spazio.(Fig.1.10) La struttura cartesiana offre ottime caratteristiche di *rigidezza meccanica*. La precisione di posizionamento del polso è costante in tutto lo spazio di lavoro (Fig.1.11).

Alle buone caratteristiche di precisione si accompagna tuttavia una scarsa destrezza, a causa dei giunti, tutti prismatici.

L'approccio dell'oggetto da manipolare è laterale. Se si desidera invece un approccio dall'alto, si deve ricorrere ad una struttura a "portale" come illustrato in Fig.1.11; questa struttura consente di coprire un grosso volume di lavoro potendo sostenere carichi di peso rilevanti.



Struttura "a portale"

Figura 1.11: Spazio di lavoro per un manipolatore cartesiano

CONFIGURAZIONE CILINDRICA

La schematizzazione dei giunti di un manipolatore a configurazione cilindrica è illustrata in Fig.1.12. Come suggerisce il nome, nel manipolatore in questione le

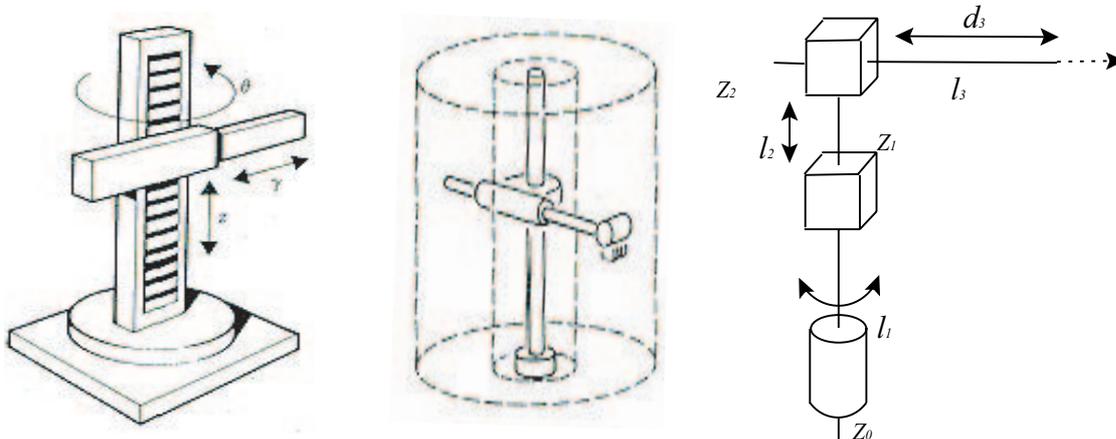


Figura 1.12: Manipolatore cilindrico, spazio di lavoro e schematizzazione.

coordinate del giunto sono quelle *cilindriche* dell' end-effector rispetto alla base.

La struttura cilindrica offre buone prestazioni per quanto riguarda la rigidità meccanica. Chiaramente però la precisione di posizionamento si riduce al crescere

1.3. Il robot industriale

dello sbraccio orizzontale. Quando i manipolatori cilindrici sono utilizzati per il trasporto di oggetti pesanti, allora vengono impiegati i motori idraulici.

Lo spazio di lavoro è una porzione di cilindro cavo.

CONFIGURAZIONE POLARE E SFERICA Un tipico esempio di manipolatore a **configurazione polare** è fornito dall' *UNIMATE 2000* (Fig.1.13)

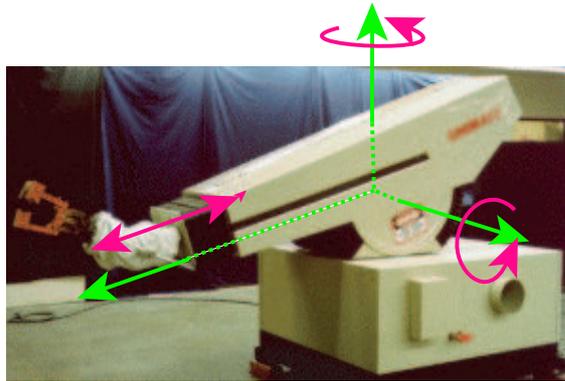


Figura 1.13: *Il manipolatore polare della Unimate.*

Questo tipo di manipolatore è dotato di 6 gradi di libertà e può essere schematizzato facendo uso di due giunti rotazionali e di uno prismatico.

Questa è anche la schematizzazione di un **manipolatore sferico**.

Entrambi i manipolatori, sferico e polare vengono utilizzati per operazioni di lavorazione; per l'azionamento dei giunti si utilizzano motori elettrici. Sicuramente inferiore, in termini di rigidità meccanica rispetto ad un manipolatore cilindrico e cartesiano, il manipolatore sferico (polare), possiede una precisione di posizionamento che tende a ridursi al crescere dello sbraccio radiale.

Lo spazio di lavoro è quello indicato in Fig.??

CONFIGURAZIONE S.C.A.R.A.

Una particolare geometria è quella *SCARA* che sta per *Selective Compliance Assembly Robot Arm*, che può essere realizzata disponendo due giunti rotoidali e uno prismatico in maniera tale che gli assi di moto siano tutti paralleli fra di loro. Nella figura seguente è riportato un robot SCARA in azione ed una sua schematizzazione.

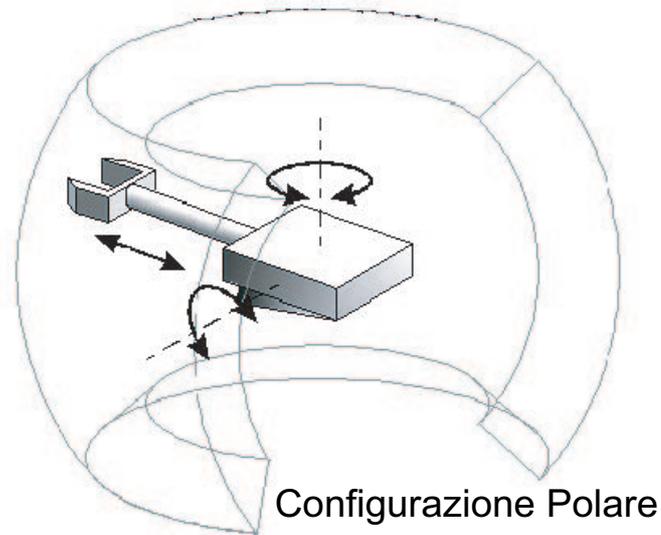


Figura 1.14: *Spazio di lavoro di un robot polare.*

La struttura presenta elevata rigidezza a carichi verticali ,ma una certa cedevolezza a carichi orizzontali; come tale, la struttura SCARA si presta bene all'esecuzione di compiti di assemblaggio per inserimenti verticali. Il manipolatore SCARA risulta così adatto alla manipolazione di piccoli oggetti.

I motori per l'azionamento dei giunti sono elettrici.

CONFIGURAZIONE ANTROPOMORFA

La geometria antropomorfa è realizzata con tre giunti rotoidali; l'asse di rotazione del giunto di base è ortogonale agli altri due tra di loro paralleli (Fig.1.16).

Per la somiglianza con il braccio umano, il secondo giunto viene detto giunto di spalla, mentre il terzo è detto giunto di gomito.

Sicuramente più destra tra le strutture prese in esame, quella antropomorfa è però poco precisa in tutto lo spazio di lavoro (costituito da una porzione di sfera).

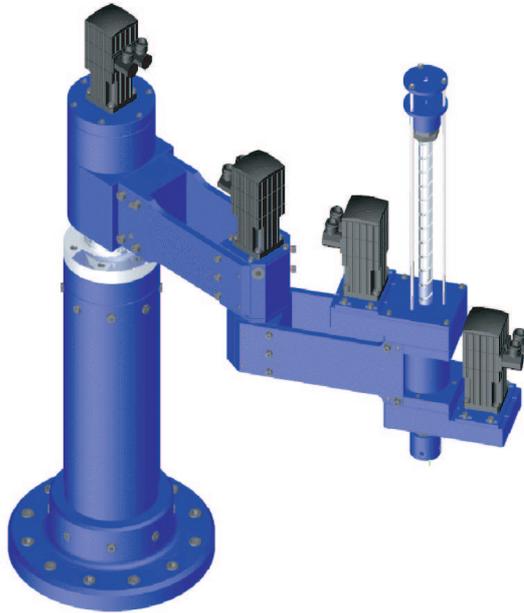


Figura 1.15: *Il robot S.C.A.R.A.*

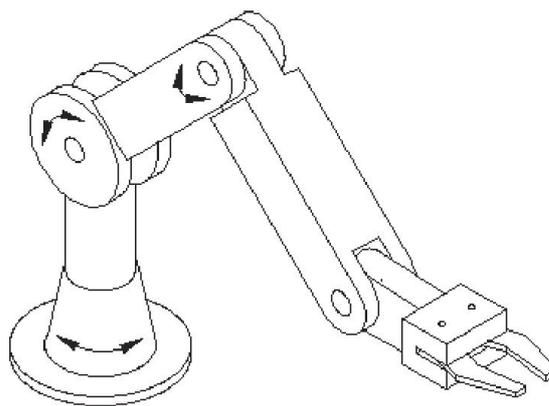


Figura 1.16: *Schema di un manipolatore antropomorfo.*



Figura 1.17: *Tipica applicazione industriale di un robot antropomorfo.*

Capitolo 2

Cinematica dei corpi rigidi

2.1 Introduzione

Nello studio dei problemi di robotica mobile è necessaria una forte conoscenza della geometria e dell'algebra lineare, utili strumenti per descrivere la meccanica di un corpo rigido nello spazio (sia esso $2D$ o $3D$).

Infatti per poter dire come un robot si è mosso da un punto \mathbf{P}_1 espresso nel sistema di riferimento \mathcal{S}_1 verso un punto \mathbf{P}_2 , espresso nel sistema di riferimento \mathcal{S}_2 , è necessario poter relazionare matematicamente i punti del sistema di riferimento \mathcal{S}_1 con quelli di \mathcal{S}_2 (Fig.3.1). In questo capitolo saranno introdotti i concetti fondamentali (di base e più avanzati) di algebra lineare necessari per comprendere la Meccanica dei Corpi Rigidi.

2.2 Rotazioni

Si consideri un corpo rigido \mathcal{O} : questi è completamente descritto in termini di posizione ed orientamento rispetto ad una generica terna di riferimento $O - xyz$. In Fig. 2.2 all'oggetto \mathcal{O} è attaccata la terna ortonormale di coordinate di riferimento $\mathcal{S}_1 \equiv (O - x_1y_1z_1)$, ove $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$ e \mathbf{k}_1 sono i versori degli assi della terna. Per O passa anche il sistema di riferimento $(O - x_0y_0z_0)$ di versori $\{\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\}$. Si vogliono relazionare le coordinate del punto \mathbf{p}_1 , espresso in \mathcal{S}_1 , con le coordinate dello stesso punto espresso nel sistema $\mathcal{S}_0(\equiv (O - x_0y_0z_0)$, di versori $\{\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\}$). Rispetto al

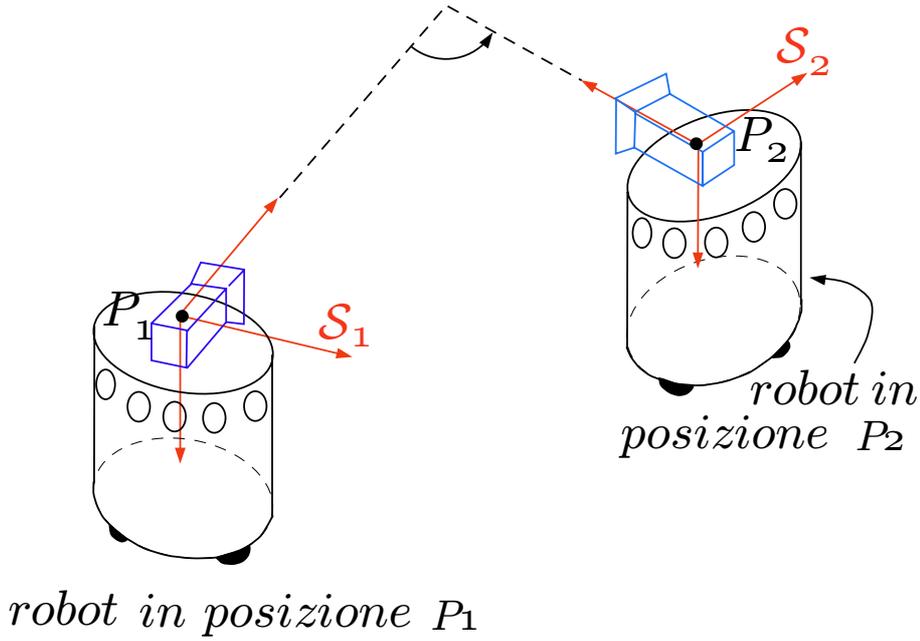


Figura 2.1: Per poter descrivere il moto di un sistema di riferimento da un punto P_1 in P_2 è necessario conoscere gli enti geometrici di base che relazionano sistemi di riferimento posti nello spazio

sistema \mathcal{S}_0 il punto \mathbf{p} può essere così scritto:

$$\mathbf{p}_0 = p_{0x}\mathbf{i}_0 + p_{0y}\mathbf{j}_0 + p_{0z}\mathbf{k}_0 \quad (2.1)$$

ove p_{0x}, p_{0y} e p_{0z} sono le proiezioni del punto \mathbf{p} rispettivamente sugli assi x_0, y_0 e z_0 .

Nel sistema \mathcal{S}_1 risulta:

$$\mathbf{p}_1 = p_{1x}\mathbf{i}_1 + p_{1y}\mathbf{j}_1 + p_{1z}\mathbf{k}_1 \quad (2.2)$$

Siccome \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1 sono rappresentazioni dello stesso vettore \mathbf{p} , allora si può dire che

$$p_{0x} = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \quad (2.3)$$

Sostituendo la (2.2) in (2.3) si ottiene:

$$p_{0x} = p_{1x}\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \quad (2.4)$$

e analogamente...

$$p_{0y} = p_{1x}\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \quad (2.5)$$

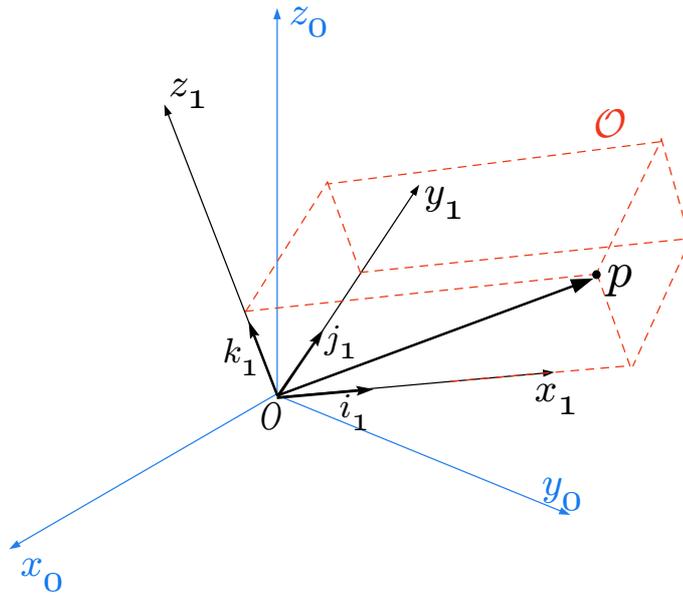


Figura 2.2: Il punto \mathbf{p}_1 espresso nel sistema di riferimento \mathcal{S}_1 , può essere espresso anche nel sistema \mathcal{S}_0 .

$$p_{0z} = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{k}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{k}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_0 \quad (2.6)$$

Le ultime 3 equazioni possono essere sintetizzate con la seguente:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 \quad (2.7)$$

ove $\mathbf{p}_0 \triangleq \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{bmatrix}$; $\mathbf{p}_1 \triangleq \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{R}_0^1 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0 \end{bmatrix}$. È di fondamentale importanza notare che la matrice $\mathbf{R}_0^1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e rappresenta la matrice di trasformazione per esprimere un vettore \mathbf{p}_1 (espresso nel sistema $Ox_1y_1z_1$) nel vettore equivalente \mathbf{p}_0 (espresso nel sistema $Ox_0y_0z_0$).

Analogamente la matrice \mathbf{R}_0^1 può essere “letta” come orientazione del sistema di riferimento \mathcal{S}_0 verso il sistema \mathcal{S}_1 . Questo secondo modo di concepire il concetto di rotazione verrà spiegato più dettagliatamente in seguito.

L'equazione (2.7) dice che, dato un vettore \mathbf{p}_1 (espresso nel sistema di riferimento \mathcal{S}_1) è possibile calcolare le componenti del medesimo vettore, ma espresso in \mathcal{S}_0 (cioè se si vuole valutare \mathbf{p}_0). In maniera analoga si può dire che:

$$p_{1x} = \mathbf{p}_1 \mathbf{i}_1 = \mathbf{p}_0 \mathbf{i}_1 = p_{0x} \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}_1 + p_{0y} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}_1 + p_{0z} \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i}_1$$

$$p_{1y} = p_{0x} \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}_1 + p_{0y} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}_1 + p_{0z} \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}_1$$

$$p_{1z} = p_{0x} \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}_1 + p_{0y} \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}_1 + p_{0z} \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_1$$

per cui risulta

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}_0 \quad (2.8)$$

ove chiaramente

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Guardando la (2.7) e la (2.8) risulta semplicemente che

$$\mathbf{R}_1^0 = (\mathbf{R}_0^1)^{-1} \quad (2.10)$$

É bene qui ricordare che, data una generica matrice \mathbf{A} , la sua inversa, \mathbf{A}^{-1} è data da:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{Adj}(\mathbf{A})$$

ove con $\text{Adj}(\mathbf{A})$ si indica la *matrice trasposta della matrice dei complementi algebrici degli elementi di \mathbf{A}* . In particolare risulta:

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = [(-1)^{i+j} \det(A_{ij})]^T \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n.$$

Ricordando che il prodotto scalare gode della proprietà commutativa, e cioè che $\mathbf{i}_0 \mathbf{j}_0 = \mathbf{j}_0 \mathbf{i}_0, \dots$ allora

$$\mathbf{R}_1^0 = (\mathbf{R}_0^1)^T \quad (2.11)$$

Quindi sostituendo la (2.10) in (2.11) risulta:

$$\mathbf{R}_1^0 = (\mathbf{R}_0^1)^{-1} = (\mathbf{R}_0^1)^T \quad (2.12)$$

Una matrice la cui inversa coincide con la trasposta, si dice *ortogonale*. Nel riferirci all'insieme di tutte le matrici di rotazione 3×3 verrà usata la simbologia $SO(3)^1$.

¹ $SO(3)$ sta per "special orthogonal" group di ordine 3

2.2. Rotazioni

Proprietá 1 (Determinante di una matrice di rotazione). *Una importante proprietà per le matrici di rotazione è che $\det(\mathbf{R}_1^0) = \pm 1$; Restringendosi però al caso in cui la rotazione sia espressa secondo la Convenzione della Mano Destra, allora risulta che*

$$\det(\mathbf{R}_1^0) = 1$$

Proprietá 2 (Rotazioni consecutive su stesso asse). *Si supponga di effettuare due rotazioni consecutive, sullo stesso asse, di un angolo ϕ e θ . Allora è possibile scrivere :*

$$\mathbf{R}_{z,\phi}\mathbf{R}_{z,\theta} = \mathbf{R}_{z,\phi+\theta}$$

Esempio 1. *Si consideri il caso indicato nella figura di sinistra: sulla base di quanto appena detto è possibile concludere che:*

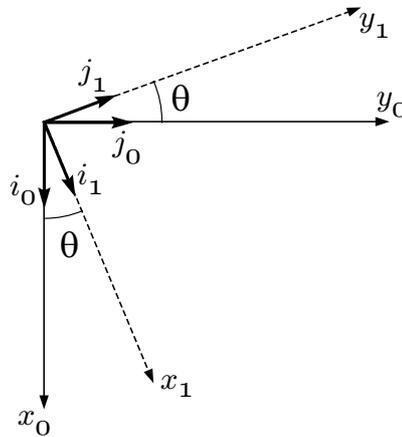
$$\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}_1 = |i_0||i_1| \cos \theta = \cos \theta$$

$$\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}_1 = |j_0||j_1| \cos \theta = \cos \theta$$

$$\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}_1 = |i_0||j_1| \cos(90 + \theta) = |i_0||j_1|(-\sin \theta) = -\sin \theta$$

$$|j_0||i_1| \cos(90 - \theta) = |j_0||i_1|(\sin \theta) = \sin \theta$$

ed essendo



$$k_0 i_1 = k_0 j_1 = i_0 k_1 = j_0 k_1 = 0$$

$$k_0 = k_1 = 1$$

allora si può concludere che

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in cui si nota, inoltre, che $\det(\mathbf{R}_1^0) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. \triangle

2.2.1 Regola della mano destra

Si consideri il caso di Fig.2.3 analogo all'esempio appena trattato; il sistema $O -$

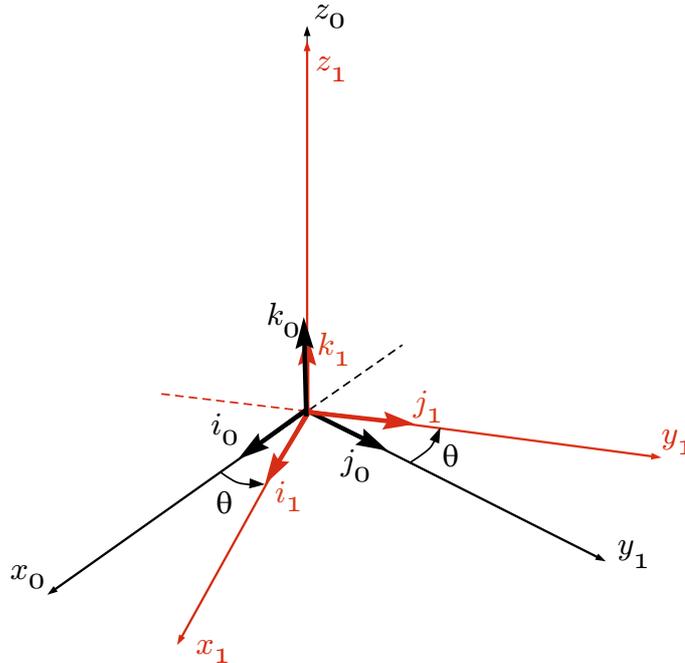


Figura 2.3: Rotazione attorno all'asse z_0

$x_1y_1z_1$ è ruotato di θ gradi rispetto a $O - x_0y_0z_0$, attorno all'asse $z_0 \equiv z_1$. Scopo di questo paragrafo è di introdurre la convenzione cosiddetta della “mano destra” per poter scrivere compiutamente la matrice di rotazione \mathbf{R}_0^1 che ci permette di esprimere il punto \mathbf{p}_1 (del sistema $O - x_1y_1z_1$) nel sistema $O - x_0y_0z_0$. Ovvero si vogliono ricavare tutti i coefficienti di \mathbf{R}_0^1 t.c. $\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1\mathbf{p}_1$.

La *Regola della mano destra* serve, sostanzialmente, per stabilire il segno dell'angolo in base al quale è effettuata la rotazione. Osservando la Fig.F2.2, pensando di afferrare con la mano l'asse di rotazione (il pollice punta nello stesso verso del versore \mathbf{k}_0) e muovendo le punta delle dita da 0 a 1, la mano tende a chiudersi (si veda Fig. 2.4); in tal caso, cioè nella rotazione espressa da \mathbf{R}_0^1 , θ avrà segno positivo. Se la mano, anzichè chiudersi su se stessa, si fosse aperta, allora θ avrebbe avuto segno negativo. Dalla Fig.2.3 si evince che:

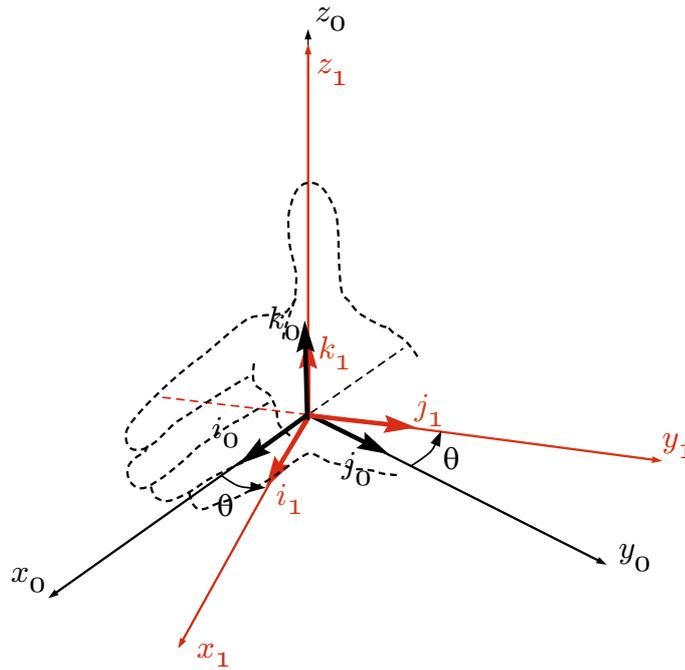


Figura 2.4: La regola della mano destra

$$\mathbf{i}_0 \mathbf{i}_1 = {}^2 \cos \theta$$

$$\mathbf{j}_0 \mathbf{i}_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = {}^3 \sin(\theta)$$

$$\mathbf{j}_1 \mathbf{i}_0 = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = {}^4 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos(\theta) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin(\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0 = \cos(\theta)$$

$$\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 = 1$$

mentre le rimanenti fanno zero a causa dell' ortogonalità dei vettori. In sostanza quello che si ottiene è

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

²...dato che il prodotto scalare di due vettori è dato dal prodotto del modulo degli stessi per il coseno dell' angolo tra essi compreso.

³Per le *formule di sottrazione*: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

⁴Per le *formule di addizione*: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

Trattandosi della rotazione di un angolo θ attorno all' asse z_0 si può utilizzare anche la scrittura equivalente:

$$\mathbf{R}_0^1 \equiv \mathbf{R}_{z,\theta} \quad (2.14)$$

che sarà utilizzata nei paragrafi successivi. Stesso discorso e risultato ottenuto in (2.13) lo si ottiene considerando terne sinistrorse: in questo caso (Fig.2.5) θ è positivo se, afferrando l' asse di rotazione e muovendosi da 1 a 0 la mano tende a chiudersi su se stessa.

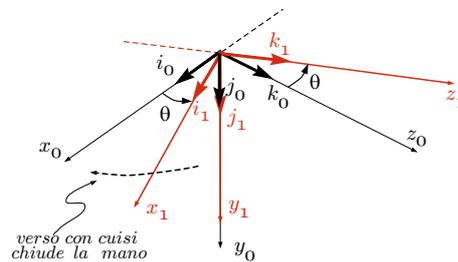


Figura 2.5: La regola della mano destra vale ancora per altre terne, come quella qui rappresentata

La matrice ricavata (2.13) ci consente di valutare numericamente \mathbf{p}_0 , ove $\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1$; vedendo nel piano bidimensionale quanto rappresentato nel 3D in Fig.2.3, si ottiene la Fig. 2.6 ove cioè $\mathbf{p}_1 = (p_{1x}, p_{1y}, p_{1z})^T$ e quindi $\mathbf{p}_0 = (p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})^T$. Per quanto detto, sostituendo \mathbf{R}_0^1 nell' equazione (2.7) e scrivendo le coordinate di \mathbf{p}_0 risulta

$$\begin{cases} p_{0x} = p_{1x} \cos \theta - p_{1y} \sin \theta \\ p_{0y} = p_{1x} \sin \theta + p_{1y} \cos \theta \\ p_{0z} = p_{1z} \end{cases}$$

2.2.2 Rotazioni di base

Dal precedente esempio è stata ricavata la seguente uguaglianza:

$$\mathbf{R}_{z,\theta} \equiv \mathbf{R}_0^1$$

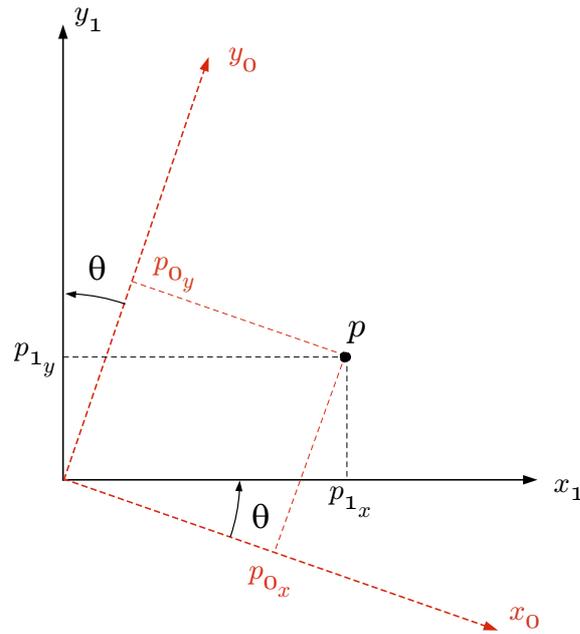


Figura 2.6: Rotazione dal sistema \mathcal{S}_0 al sistema \mathcal{S}_1 di un angolo θ .

che esprime la rotazione di un angolo θ attorno all'asse z :

$$\mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Analogamente è possibile ricavare le espressioni delle matrici di rotazione sia attorno all'asse x che attorno a y :

- Rotazione attorno all'asse x

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_0 &= 1 & \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_0 &= 0 \\ \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_0 &= 0 & \mathbf{i}_1 \mathbf{k}_0 &= 0 \\ \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_0 &= 0 & & \\ \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0 &= \cos \theta & & \\ \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_0 &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta & & \\ \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 &= \cos \theta & & \end{aligned} \quad (2.16)$$

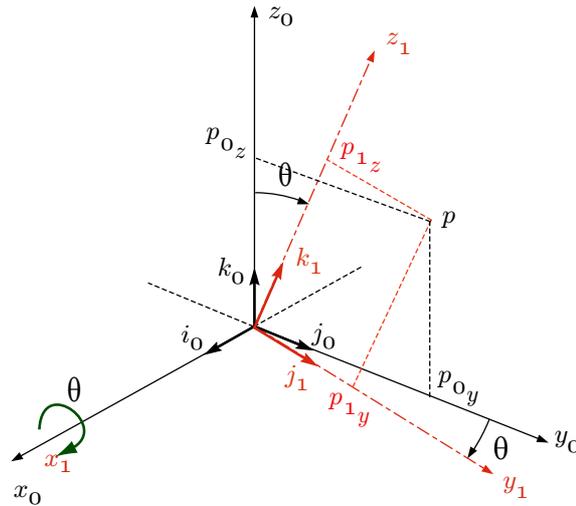


Figura 2.7: Rotazione dal sistema \mathcal{S}_0 al sistema \mathcal{S}_1 di un angolo θ attorno all' asse x .

Quindi

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Poichè per la Regola della Mano Destra θ ha segno negativo allora risulta...

$$\mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

- Rotazione attorno all' asse y Analogamente a quanto ricavato in (2.17) si può facilmente ricavare la seguente:

$$\mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Esempio 2. Si consideri il punto $\mathbf{p}_0 = [10, 0, 0]^T$ espresso nel sistema $Ox_0y_0z_0$. Il sistema di riferimento $Ox_1y_1z_1$ risulta ruotato di 40° sull'asse z rispetto al precedente. Si calcoli \mathbf{p}_1 .

2.3. Composizione di rotazioni

Sol. 1. Poichè la rotazione che serve per portare il sistema 1 sul sistema 0 è di -40° , allora la matrice di rotazione risulta essere:

$$\mathbf{R}_1^0 = \mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-40^\circ) & -\sin(-40^\circ) & 0 \\ \sin(-40^\circ) & \cos(-40^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.766 & 0.642 & 0 \\ -0.642 & 0.766 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice così ricavata consente di riportare punti espressi nel sistema 0, nel sistema 1, che è proprio l'obbiettivo dell'esercizio. Effettuando il semplice prodotto $\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}_0$ si ottiene:

$$\mathbf{p}_1 = [7.66, -6.42, 0]^T$$

2.3 Composizione di rotazioni

La composizione di rotazioni assume un ruolo fondamentale in ambito robotico. Innanzitutto è bene ricordare che con la notazione \mathbf{R}_0^1 si indica quella trasformazione che consente di esprimere punti del sistema $O - x_1y_1z_1$ portandoli in punti espressi nel sistema $O - x_0y_0z_0$.

Un punto \mathbf{p} può essere equivalentemente rappresentato come $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ o \mathbf{p}_2 , ovvero lo si può esprimere nel sistema $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_2$ o nel sistema di riferimento intermedio \mathcal{S}_1 :

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^2 \mathbf{p}_2 \quad (2.19)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 \quad (2.20)$$

Sostituendo la (2.20) nella (2.18) si ottiene:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 \quad (2.21)$$

e confrontando la (2.21) appena ottenuta con la (2.19):

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \quad (2.22)$$

In sostanza, per esprimere un punto \mathbf{p}_2 (nel sistema $O - x_2y_2z_2$) nel sistema $O - x_0y_0z_0$, si deve prima passare dal sistema di riferimento intermedio $O - x_1y_1z_1$. La (2.21), letta per i sistemi di riferimento, significa:

- Ruotare la terna $Ox_0y_0z_0$ fino a sovrapporla alla terna $Ox_1y_1z_1$, mediante \mathbf{R}_0^1 ;
- Ruotare l'attuale terna $O - x_1y_1z_1$ fino a sovrapporla alla terna $O - x_2y_2z_2$ (in cui si trova \mathbf{p}_2) secondo la matrice \mathbf{R}_1^2 ;

Cioè la rotazione complessiva (come nella (2.22)) è esprimibile come successione di rotazioni parziali, ciascuna definitiva rispetto all' esito della rotazione precedente. La terna rispetto alla quale avviene la rotazione in atto viene definita *terna corrente*.

Esempio 3. *Si considerino date*

$$\mathbf{R}_0^1 = R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{R}_1^2 = R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

È importante ricordare come l'**ordine** con cui una sequenza di rotazioni è eseguita (e conseguentemente l'ordine con cui il prodotto delle matrici di rotazione è eseguito) è cruciale. Infatti le rotazioni non soddisfano, in genere, alla proprietà **commutativa**.

2.3.1 Rotazioni rispetto ad una terna fissa

Un altro modo, sovente utile, di esprimere rotazioni successive può essere quello di specificare assi e angoli di rotazioni rispetto ad una *terna fissa*. Si consideri il caso rappresentato in figura 2.8. Il parallelepipedo viene prima ruotato attorno all'asse z (passo (1)) così da passare dalla configurazione (A) a quella (B); poi l'altra rotazione viene eseguita attorno all'asse y (riferito alla terna *fissa* della config. (A)).

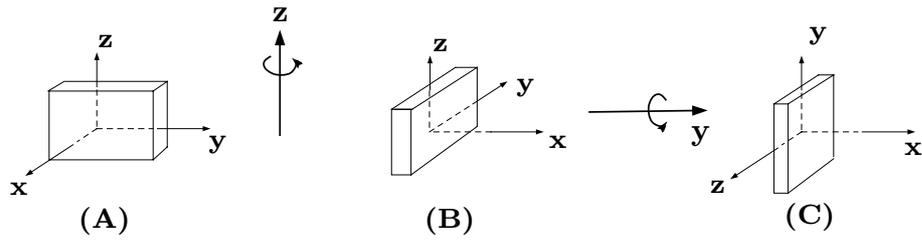


Figura 2.8: Rotazione rispetto ad un asse arbitrario: esempio

Lo scopo di questo paragrafo è quello di far capire come eseguire rotazioni rispetto a terne fisse disponendo solo dei mezzi di rotazione rispetto a terne mobili finora introdotti. L'idea di base è la seguente: si effettua il passo (1); poi però si annulla tale passo tornando nella configuraizone iniziale, si ruota attorno all'asse y di quanto si sarebbe dovuto ruotare nel passo (2) (ottenendo quanto rappresenato in (B') Fig.2.9) e poi di nuovo si ruota attorno all'asse z secondo quanto richiesto nel passo (1).

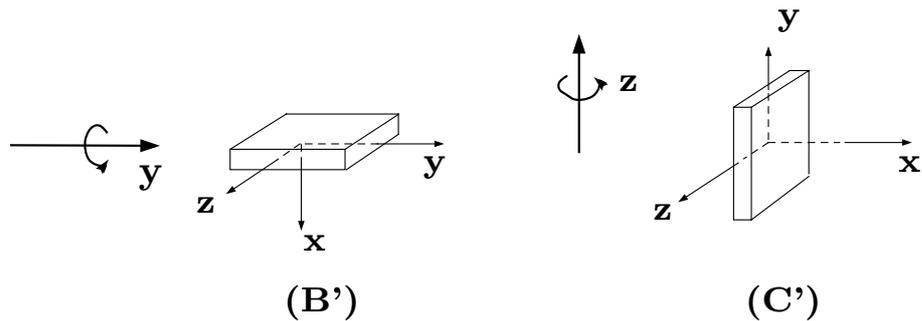


Figura 2.9: Rotazione rispetto ad un asse arbitrario: esempio

É allora evidente come il processo risulta invertito rispetto a quello che si eseguirebbe nel caso di terne mobili. Per cui la matrice di rotazione \mathbf{R}_0^2 , che esprime la rotazione di Fig. ?? è così scrivibile:

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_1^2 \mathbf{R}_0^1$$

2.3.2 Rotazioni attorno ad un asse arbitrario

Spesso le rotazioni non vengono eseguite rispetto al sistema principale di coordinate, ma rispetto ad un *arbitrario* asse disposto nello spazio. Sia $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$ il

versore che definisce questo nuovo asse di rotazione e lo si supponga centrato nell'origine del sistema $O - x_0y_0z_0$ (Fig.2.10).

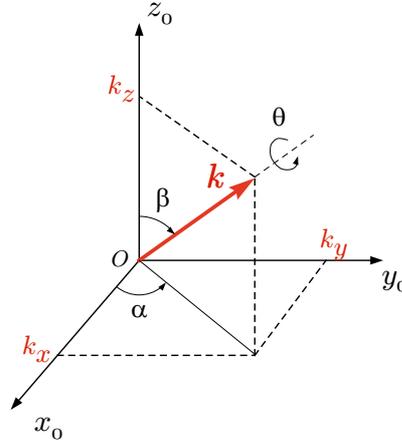


Figura 2.10: Rotazione attorno al vettore \mathbf{k} (asse arbitrario)

Si vuole adesso derivare la matrice $\mathbf{R}_{k,\theta}$ che rappresenta la rotazione di un angolo θ attorno all' asse \mathbf{k} . Il problema può essere affrontato seguendo i 3 passi successivi:

1. Portare \mathbf{k} a coincidere con l' asse z_0 , secondo una certa sequenza di rotazioni.
2. Ruotare il sistema di riferimento dell' angolo θ attorno a z_0 .
3. Riportare il versore \mathbf{k} nella sua posizione originale.

Osservando la Fig.2.10 si può sintetizzare l' algoritmo appena enunciato con la seguente uguaglianza:

$$\mathbf{R}_{k,\theta} = \mathbf{R}_{z,\alpha} \mathbf{R}_{y,\beta} \mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{R}_{y,-\beta} \mathbf{R}_{z,-\alpha} \quad (2.23)$$

e poichè \mathbf{k} ha norma unitaria, risulta che...

$$\sin \alpha = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (2.24)$$

$$\cos \alpha = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (2.25)$$

$$\sin \beta = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (2.26)$$

$$\cos \beta = k_z \quad (2.27)$$

Sostituendo le equazioni appena ottenute nella (2.23) ed eseguendo i prodotti ⁵.

$$\mathbf{R}_{k,\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 \nu_\theta + \cos \theta & k_x k_y \nu_\theta - k_z \sin \theta & k_x k_z \nu_\theta + k_y \sin \theta \\ k_x k_y \nu_\theta + k_z \sin \theta & k_y^2 \nu_\theta + \cos \theta & k_y k_z \nu_\theta - k_x \sin \theta \\ k_x k_z \nu_\theta - k_y \sin \theta & k_y k_z \nu_\theta + k_x \sin \theta & k_z^2 \nu_\theta + \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

ove $\nu_\theta \triangleq 1 - \cos \theta$.

2.4 Rappresentazione di una Rotazione Arbitraria

In genere le matrici di rotazione forniscono una rappresentazione ridondante dell'orientamento di una terna; esse sono, difatti, caratterizzate da **nove** elementi che non sono indipendenti, ma legati tra di loro da sei vincoli, dovuti alle condizioni di ortogonalità

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$

Questo ci consente di dire che il numero di parametri indipendenti è 3.

Per rappresentare una rotazione arbitraria è possibile utilizzare uno dei seguenti metodi:

- 1° Modo: **Rappresentazione Asse/Angolo**
- 2° Modo: **Rappresentazione con Angoli di Eulero**
- 3° Modo: **Rappresentazione in Roll,Pitch e Yaw**

2.4.1 Rappresentazione Asse/Angolo

Data una matrice di rotazione \mathbf{R} , questa può essere sempre rappresentata da una singola rotazione attorno ad un opportuno *asse* nello spazio, secondo un opportuno *angolo*:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathbf{k},\theta}$$

⁵La dimostrazione è riportata nel testo di *Sciavicco e Siciliano* [?]

dove $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T$ è il vettore unità che definisce gli assi di rotazione, mentre θ è l'angolo di rotazione attorno a \mathbf{k} .

$$\theta = \arccos\left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}\right) \quad \text{ove} \quad \text{tr}(\mathbf{R}) = R_{11} + R_{22} + R_{33}$$

e dove

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{bmatrix}$$

Esempio 4. Data una matrice di rotazione del tipo:

$$\mathbf{R}_{x,30} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene, secondo quanto ricavato precedentemente:

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos\left(\frac{1 + \frac{2\sqrt{3}}{2} - 1}{2}\right) = 30^\circ \\ &= \mathbf{k} = \frac{1}{2 \sin 30} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

La matrice di rotazione ha 3 gradi di libertà. \triangle

Questa rappresentazione ASSE-ANGOLO non è unica perchè ruotando di $-\theta$ attorno a $-\mathbf{k}$ equivale a ruotare di θ attorno a \mathbf{k} :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{k},\theta} = \mathbf{R}_{-\mathbf{k},-\theta}$$

Se $\theta = 0^\circ$ allora $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ e \mathbf{k} è indefinito.

Esempio 5. Si supponga adesso che $\mathbf{R} \in SO(3)$ sia generato da una rotazione di 90° attorno a z_0 seguito da una rotazione di 30° attorno a y_0 , seguita ancora da una rotazione di 60° attorno a x_0 . Cioè:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x,60} \mathbf{R}_{y,30} \mathbf{R}_{z,90} =$$

2.4. Rappresentazione di una Rotazione Arbitraria

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60 & -\sin 60 \\ 0 & \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30 & 0 & \sin 30 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 30 & 0 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Inoltre risulta che $\text{tr}(\mathbf{R}) = 0 - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$ da cui $\theta = \arccos\left(\frac{\text{tr}(\mathbf{R})-1}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$.

L'asse equivalente è dato da

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2 \sin 120^\circ} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \triangle$$

Questa rappresentazione ASSE-ANGOLO caratterizza una data rotazione e traslazione descritta da 4 quantità: l'angolo e le tre componenti del versore dell'asse. Tuttavia si può osservare che le tre componenti del versore \mathbf{k} **non** sono indipendenti, ma sono vincolate dalla condizione:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1$$

dato che si è assunto che \mathbf{k} fosse un versore, cioè a norma unitaria.

Quindi è possibile rappresentare il vettore ASSE-ANGOLO come:

$$\mathbf{r} = [r_x, r_y, r_z]^T = (\theta k_x, \theta k_y, \theta k_z)^T$$

2.4.2 Rappresentazione con Angoli di Eulero

Una rappresentazione dell'orientamento in termini di tre parametri costituisce quella che viene comunemente chiamata *rappresentazione minima*.

Tale rappresentazione può essere realizzata utilizzando 3 angoli:

$$\phi = [\varphi, \theta, \psi]^T$$

Questi 3 angoli sono noti con *Angoli di Eulero* ed esprimono, chiaramente, una generica rotazione come composizione di tre rotazioni elementari secondo opportune

sequenze così da garantire però che due rotazioni successive non avvengano attorno ad assi paralleli. Le rotazioni sono eseguite attorno agli *Assi correnti*.

In genere si realizza la seguente successione di passi:

- si ruota la terna origine dell'angolo φ intorno all'asse z : tale rotazione è descritta dalla matrice di rotazione $\mathbf{R}_z(\varphi)$.
- si ruota la terna dell'angolo θ intorno all'asse y' corrente: tale rotazione è descritta dalla matrice di rotazione $\mathbf{R}_{y'}(\theta)$.
- si ruota la terna dell'angolo ψ attorno all'asse z'' corrente: tale rotazione è descritta dalla matrice di rotazione $\mathbf{R}_{z''}(\psi)$.

In termini di matrici di rotazione, l'orientamento finale della terna, che si ricava con la composizione di rotazioni definite attorno alla *terna corrente* è caratterizzato dalla matrice di rotazione ottenuta moltiplicando da sinistra verso destra le matrici rappresentative delle rotazioni elementari effettuate:

$$\mathbf{R}_0^1 = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_{y'}(\theta)\mathbf{R}_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta c_\psi & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

In seguito verrà trattato il caso in cui si voglia estrapolare i tre angoli di Eulero a partire dalla matrice di rotazione \mathbf{R} .

2.4.3 Angoli di Roll-Pitch-Yaw

Una matrice di rotazione \mathbf{R} può anche essere descritta come il prodotto di rotazioni successive intorno agli assi principali, x_0, y_0, z_0 utilizzando un tipo di notazione degli angoli frequentemente utilizzata in campo aeronautico.

Tali angoli sono gli angoli di *roll*, *pitch* e *yaw*, ovvero, rispettivamente, di *rollio*, *beccheggio* e *imbardata* di uno scafo (Fig.??). La rotazione complessiva, detta $\phi = [\varphi, \theta, \psi]^T$, rappresenta rotazioni eseguite attorno ad una terna fissa e solidale al baricentro dello scafo.

Praticamente, la rotazione complessiva viene costruita come segue:

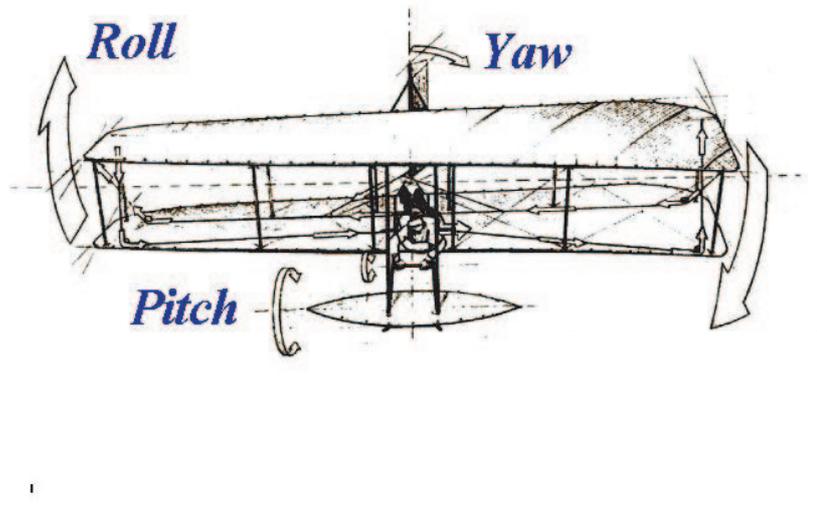


Figura 2.11: *Rappresentazione degli angoli Roll-Pitch-Yaw (Rollio-Beccheggio-Imbardata).*

- si ruota la terna origine di un angolo φ intorno all'asse z (rollio);
- si ruota la terna origine di un angolo θ intorno all'asse y (beccheggio);
- si ruota la terna origine di un angolo ψ intorno all'asse x (imbardata);

In termini di matrici di rotazioni il tutto può essere così espresso:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_0^1 &= \mathbf{R}_{z,\varphi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\psi} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & -s_\theta c_\psi + c_\varphi s_\theta s_\psi & s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi \\ s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.5 Trasformazioni omogenee

Si consideri il sistema di coordinate $Ox_0y_0z_0$ ed il sistema $Ox_1y_1z_1$ esclusivamente traslati tra loro di un vettore \mathbf{d}_0^1 (centrato in \mathcal{S}_0) di modulo $|\mathbf{d}|$, come rappresentato in Fig.2.12. Come si vede dalla Fig.2.12, la terna \mathcal{S}_1 ha gli assi paralleli a \mathcal{S}_0 .

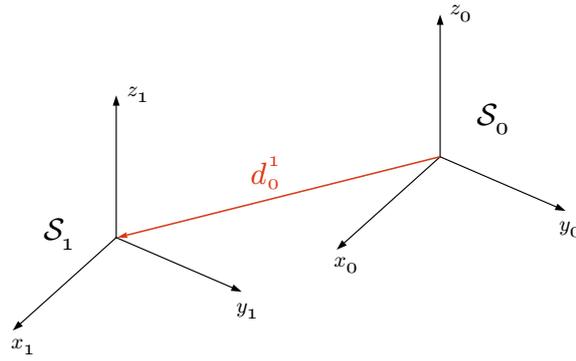


Figura 2.12: Il vettore \mathbf{d}_0^1 rappresenta una traslazione che porta punti dal sistema \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_0 .

Inoltre \mathbf{d}_0^1 è un vettore che permette di esprimere un punto del sistema \mathcal{S}_1 nel sistema \mathcal{S}_0 ; cioè vale la relazione:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1 \quad (2.29)$$

che, estesa, equivale a scrivere:

$$\begin{cases} p_{0x} = p_{1x} + d_{0x}^1 \\ p_{0y} = p_{1y} + d_{0y}^1 \\ p_{0z} = p_{1z} + d_{0z}^1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Generalizzando al caso di moto roto-traslatorio, risulta che la relazione più generale tra due sistemi di riferimento $O - x_0y_0z_0$ e $O - x_1y_1z_1$ può essere espressa come la combinazione di una rotazione e di una traslazione, detta “moto rigido” o “trasformazione di coordinate” (traslazione+rotazione).

Definizione 1 (Moto Rigido). Una trasformazione

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1 \quad (2.31)$$

definisce un “moto rigido” se \mathbf{R}_0^1 è ortogonale.

Questa definizione tiene conto anche della “riflessione” nel caso in cui $\det(\mathbf{R}_0^1) = -1$. Si supponga adesso di avere le seguenti:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1 \quad (2.32)$$

e

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_1^2 \quad (2.33)$$

La loro composizione ci fa scrivere:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 (\mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_1^2) + \mathbf{d}_0^1 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{R}_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 \quad (2.34)$$

Ma la relazione tra \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_2 è ancora così esprimibile:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_0^2 \quad (2.35)$$

Eguagliando la (2.35) con la (2.34) risulta che:

$$\mathbf{R}_0^2 \triangleq \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2$$

$$\mathbf{d}_0^2 \triangleq \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{R}_0^1 \mathbf{d}_1^2$$

Per ottenere una rappresentazione compatta del legame esistente tra le rappresentazioni delle coordinate di uno stesso punto rispetto a due terne differenti, si introduce la cosiddetta *rappresentazione omogenea* (di grande utilità in Computer Grafica):

$$\tilde{\mathbf{p}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rappresntazione Omogenea del vettore } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

In tal modo è possibile inserire l'equazione affine (non lineare!) (2.12) nella seguente equazione lineare:

$$\tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{A}_0^1 \tilde{\mathbf{p}}_1 \quad (2.36)$$

ove è facile verificare che

$$\mathbf{A}_0^1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad \text{Matrice di Trasformazione Omogenea} \quad (2.37)$$

A questo punto è possibile anche estendere in forma omogenea il prodotto discusso in (2.34). Volendo inserire queste due uguaglianze in una sola matrice data dal prodotto di altre due generiche, si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^2 & \mathbf{d}_1^2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 & \mathbf{R}_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ove } \mathbf{0} = (0, 0, 0)^T$$

Quindi un *moto rigido* (in questo caso di roto-traslazione) può essere rappresentato da un insieme di matrici, dette **Matrici di Trasformazione Omogenee**, del tipo:

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ove } \mathbf{R} \in SO(3) \quad \text{e dove } \mathbf{H} \in \mathbb{R}^4 \quad (2.38)$$

in cui $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2$ e $\mathbf{d} = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1$. Si cerca adesso di ricavare \mathbf{H}^{-1} : dall'algebra lineare è noto che, data una matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

la sua inversa è così esprimibile:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} & -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Per poter usare la \mathbf{H} è necessario incrementare di uno la dimensione dei vettori \mathbf{p} , così da scrivere:

$$\mathbf{P}_0 \triangleq \mathbf{p}_0^H = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_1 \triangleq \mathbf{p}_1^H = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sia \mathbf{P}_0 che \mathbf{P}_1 sono note come rappresentazioni omogenee rispettivamente dei vettori \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1 .

Si può vedere direttamente che le trasformazioni del tipo $\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}\mathbf{p}_1 + \mathbf{d}$ è equivalente all'equazione:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{H}\mathbf{P}_1 = \mathbf{H}_0^1\mathbf{P}_1$$

Un insieme di trasformazioni omogenee di base, per le traslazioni, è il seguente.

$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5. Trasformazioni omogenee

ove $Trans_{x,a}$ sta ad indicare la traslazione, lungo l'asse x , di un valore a fissato.

Per le rotazioni risulta

$$Rot_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rot_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una forma più generale (utile anche in alcune applicazioni robotiche) è quella riguardante la scrittura della trasformazione omogenea anche con il fattore di *scalatura* e di *proiezione*.

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & d_x \\ n_y & s_y & a_y & d_y \\ n_z & s_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I tre vettori appena introdotti indicano:

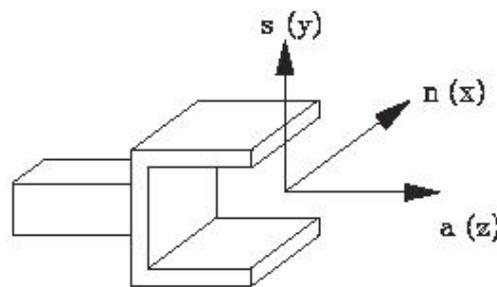


Figura 2.13: Notazione con vettori $\mathbf{n}\mathbf{s}\mathbf{a}$.

- \mathbf{n} = “direzione dell’asse o_1x_1 espresso in $Ox_0y_0z_0$;
- \mathbf{s} = “direzione dell’asse o_1y_1 espresso in $Ox_0y_0z_0$;

- \mathbf{s} = “direzione dell’asse o_1z_1 espresso in $Ox_0y_0z_0$.”

mentre invece \mathbf{d}_0^1 esprime il vettore che congiunge i centri dei due sistemi di riferimento (centrato in \mathcal{S}_0).

Un caso ancora più generale di trasformazione omogenea è la seguente, spesso utilizzata in Computer Grafica, che tiene conto sia degli effetti prospettici sia del fattore di scala:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{d}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & s_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{rotazione} & \text{traslazione} \\ \text{perspective} & \text{scaling} \end{bmatrix}$$

Esempio 6. Siano dati i due vettori: $\mathbf{p}_1 = (0, -3)^T$ e $\mathbf{d}_0^1 = (3, 3)^T$. Si vuole ricavare la matrice \mathbf{H}_0^1 che permette di esprimere un punto P_1 nel punto P_0 (vettori in rappresentazione omogenea dei vettori assegnati precedentemente).

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1$$

ove

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{bmatrix}$$

Quindi si può scrivere:

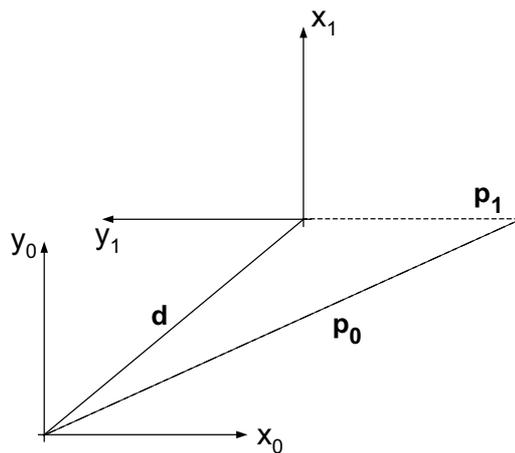


Figura 2.14: Esempio di trasformazione omogenea

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.5. Trasformazioni omogenee

Questo risultato è anche confermato dal disegno. Ma allora è subito evidente che

$$\mathbf{H}_0^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \Delta$$

Esempio 7. Si consideri il robot indicato nella figura di destra. Lo scopo è quello di scrivere la matrice \mathbf{H}_0^1 che permetta di scrivere il punto \mathbf{p}_2 nel sistema di riferimento \mathcal{S}_0 . Si assuma che

$$\mathbf{p}_2 = (1, 0, 0)^T$$

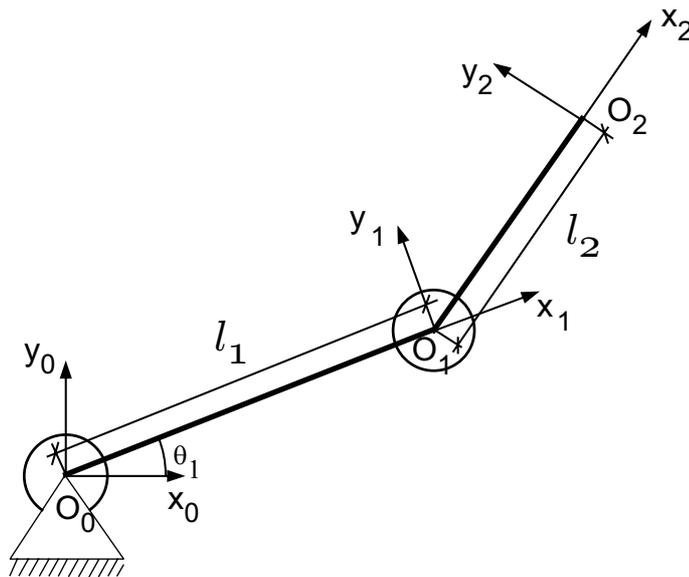


Figura 2.15: Esempio di trasformazione omogenea con applicazioni alla cinematica dei manipolatori antropomorfi

Si può notare, da una prima analisi, che :

$$\text{se } \theta_1 = \theta_2 = 0 \Rightarrow p_0 = \begin{pmatrix} l_1 + l_2 + 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{se } \theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ e } \theta_2 = 0 \Rightarrow p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 + l_2 + 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre, per quanto detto nelle pagine precedenti, risulta che $\mathbf{P}_1 = \mathbf{H}_1^2 \mathbf{P}_2$, ove $\mathbf{P}_2 = [1, 0, 0, 1]^T$ e che:

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^2 \vdots (\overline{O_1 O_2}) \\ \cdots \cdots \cdots \\ \mathbf{0} \vdots 1 \end{bmatrix}$$

Per la Regola della Mano Destra risulta che

$$\mathbf{R}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mentre si può vedere che

$$(\overline{O_1 O_2}) = \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questo ci porta a concludere che:

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, si può subito vedere che:

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & l_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & l_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e ricordando che $\mathbf{P}_0 = \mathbf{H}_0^1 \mathbf{P}_1 = \mathbf{H}_0^1 (\mathbf{H}_1^2) \mathbf{P}_2$ è possibile ricavare la \mathbf{H}_0^2 . \triangle

Esempio 8. Si consideri la situazione mostrata in Fig.2.16. La terna $Ox_c y_c z_c$ è un sistema di riferimento solidale con una telecamera digitale sulla quale vengono

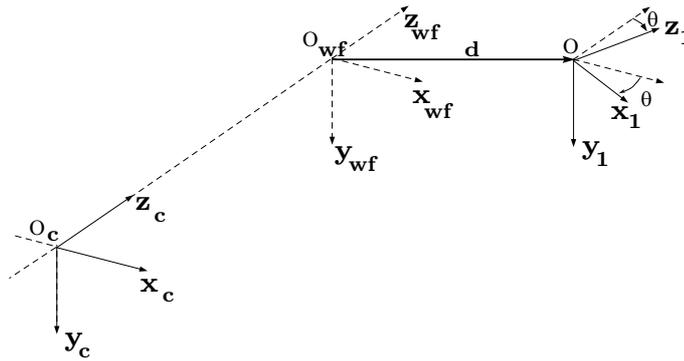


Figura 2.16: Esempio 10

proiettati (secondo il modello della camera oscura) punti espressi in un certo sistema di riferimento $Ox_1y_1z_1$ posizionato ed orientato in un modo noto rispetto al sistema di riferimento globale (detto anche “world-frame”). In particolare risulta che $\mathbf{X}_1 = [1, 1, 1]^T$ (in $Ox_1y_1z_1$) è il punto nel suo sistema, $\mathbf{d}_{wf}^1 = [10, 0, 5]^T$ è il vettore distanza tra il sistema world e “1”, $\theta = 20^\circ$ è l’angolo tra gli assi x_{wf} e x_1 . Infine $\mathbf{d}_c^{wf} = [0, 0, 7]^T$. Si richiede di calcolare il vettore \mathbf{X}_c espresso nel sistema di riferimento della telecamera.

La trasformazione che consente di esprimere nel sistema camera il punto \mathbf{X}_1 è la seguente:

$$\tilde{\mathbf{X}}_c = \mathbf{H}_c^1 \tilde{\mathbf{X}}_1$$

ove è facile verificare che $\mathbf{H}_c^1 = \mathbf{H}_c^{wf} \mathbf{H}_{wf}^1$. In particolare si ha che

$$\mathbf{H}_c^{wf} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_c^{wf} & \mathbf{d}_c^{wf} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \quad \mathbf{H}_{wf}^1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{wf}^1 & \mathbf{d}_{wf}^1 \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

Inoltre dal testo risulta che

$$\mathbf{d}_{wf}^1 = [10, 0, 5]^T \quad \mathbf{R}_{wf}^1 = \mathbf{R}_{y,20} = \begin{bmatrix} \cos(20) & 0 & \sin(20) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(20) & 0 & \cos(20) \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_c^{wf} = [0, 0, 70]^T \quad \mathbf{R}_c^{wf} = \mathbf{I}$$

Eseguendo i conti si ottiene semplicemente:

$$\mathbf{X}_c = \begin{bmatrix} c_{20} + s_{20} + 10 \\ 1 \\ -s_{20} + c_{20} + 5 + 70 \end{bmatrix}$$

Esempio 9. Se $Ox_1y_1z_1$ è ottenuto da $Ox_0y_0z_0$ grazie ad una rotazione di $\pi/2$ attorno all'asse delle x , e poi una rotazione di $\pi/2$ attorno all'asse (fissato) y_0 ; si trovi la matrice di rotazione \mathbf{R}_0^1 che rappresenta tale trasformazione composta. Si disegnino inoltre i sistemi di riferimento iniziali e finali, comprensivi dei passaggi intermedi.

Svolgimento: In fig.?? è possibile vedere l'applicazione della prima rotazione at-

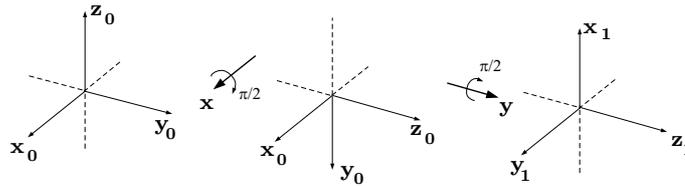


Figura 2.17: Esempio 9

torno all'asse x_0 ; successivamente viene eseguita la rotazione attorno all'asse y_0 ($\pi/2$). Dalla teoria è noto che la rotazione \mathbf{R}_0^1 attorno a assi fissi deve essere espressa in senso contrario a quanto viene fatto per le rotazioni attorno a sistemi di riferimento solidali: in tal caso risulta semplicemente che:

$$\mathbf{R}_0^1 = \mathbf{R}_{y,\pi/2}\mathbf{R}_{x,\pi/2}$$

Esempio 10. Dato \mathcal{S}_0 determinare la matrice di rotazione da 0 a 1, ottenuto come rotazione attorno a z_0 di 90° , seguita da una rotazione di -45° attorno a y_0 e da un'ulteriore di 30° attorno a x_1

Svolgimento: La soluzione risulta essere

$$\mathbf{R}_0^1 = \mathbf{R}_{y_0,-45}\mathbf{R}_{z_0,90}\mathbf{R}_{x_1,30}$$

Esempio 11. Si consideri la stazione di lavoro indicata in Fig.?.?. La telecamera CCD può inquadrare il sistema $Ox_b y_b z_b$ e il centro dell'oggetto da afferrare $Ox_0 y_0 z_0$. Si calcoli la trasformazione omogenea \mathbf{T}_b^0 che consente di esprimere il centro C dell'oggetto rispetto a $Ox_b y_b z_b$

Svolgimento: Innanzitutto $\mathbf{T}_b^0 = \mathbf{T}_b^c \mathbf{T}_c^0$ ove

$$\mathbf{T}_c^0 = \left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ \mathbf{R}_c^0 & 10 \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right]$$

ove

$$\mathbf{R}_c^0 = \mathbf{R}_{y_c, \pi} \mathbf{R}_{z, \pi/2} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

In più si vuole trovare anche

$$\mathbf{T}_c^b = \left[\begin{array}{c|c} & -10 \\ \mathbf{R}_c^b & 20 \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{R}_c^b = \mathbf{R}_{x, \pi} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

A questo punto risulta:

$$\mathbf{T}_b^0 = \mathbf{T}_b^c \mathbf{T}_c^0$$

ove

$$\mathbf{T}_c^b = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_c^{bT} & -\mathbf{R}_c^{bT} \mathbf{t}_c^b \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

2.6 Matrici skew-simmetriche

In questo paragrafo verrà introdotto ed utilizzato il concetto di matrice *skew-simmetrica*. In particolare si farà vedere come l' utilizzo di queste matrici permetta di semplificare notevolmente i conti.

Definizione 2 (Matrice *skew-simmetrica*). Una matrice S è detta *skew-simmetrica* se e solo se

$$S^T + S = \mathbf{0} \tag{2.39}$$

Definizione 3. *L'insieme delle matrici 3×3 skew-simmetriche è indicato con $SS(3)$.*

Se S ha s_{ij} come componenti, con $i, j = 1, 2, 3$ allora la (2.39) è equivalente alle 9 equazioni del tipo:

$$s_{ij} + s_{ji} = 0 \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.40)$$

Questo ci suggerisce che

$$s_{ii} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.41)$$

Ogni matrice skew-simmetrica, quindi, può essere scritta nella forma più generale:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Se si possiede un generico vettore $\mathbf{a} \triangleq (a_x, a_y, a_z)^T$, allora

$$S(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_x & a_y \\ a_x & 0 & -a_z \\ -a_y & a_z & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

2.6.1 Proprietà delle matrici skew-simmetriche

Verranno di seguito elencate alcune proprietà delle matrici skew-simmetriche.

- **Linearità:**

$$S(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha S(\mathbf{a}) + \beta S(\mathbf{b}) \quad (2.44)$$

- **Prodotto vettoriale \rightarrow Prodotto scalare:**

$$S(\mathbf{a})\mathbf{p} = \mathbf{a} \times \mathbf{p} \quad (2.45)$$

Questa proprietà dice che il prodotto vettoriale tra \mathbf{a} e \mathbf{p} (ciascuno di essi $\in \mathbb{R}^3$) può essere ricondotto al prodotto matrice-vettore, ove la matrice è ottenuta facendo la skew-simmetrica di \mathbf{a} .

-

$$\mathbf{R}S(\mathbf{a})\mathbf{R}^T = S(\mathbf{R}\mathbf{a}) \quad (2.46)$$

Dim.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}S(\mathbf{a})\mathbf{R}^T\mathbf{b} &= \mathbf{R}(\mathbf{a} \times \mathbf{R}^T\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{R}\mathbf{a} \times \mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{b} \\
&= \mathbf{R}\mathbf{a} \times \mathbf{b} \\
&= S(\mathbf{R}\mathbf{a})\mathbf{b}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

•

$$\mathbf{R}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{R}\mathbf{a} \times \mathbf{R}\mathbf{b} \tag{2.48}$$

2.6.2 Derivata della matrice di rotazione

Si supponga adesso di avere una matrice \mathbf{R} di rotazione dipendente solamente dalla variabile θ . Quindi:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta) \in SO(3) \quad \forall \theta$$

Inoltre, dato che \mathbf{R} è ortogonale, allora risulta $\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\theta)^T = \mathbf{I}$. Derivando rispetto a θ si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\mathbf{R}(\theta)^T + \mathbf{R}(\theta)\frac{d\mathbf{R}^T}{d\theta} = 0 \tag{2.49}$$

Se si definisce

$$\mathbf{S} \triangleq \frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\mathbf{R}(\theta)^T$$

si può vedere che si tratta di una matrice *skew-symmetric*: infatti $\mathbf{S}^T = \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\mathbf{R}(\theta)^T\right)^T = \mathbf{R}(\theta)\frac{d\mathbf{R}^T}{d\theta}$. Quindi la (2.49) altro non dice che $\mathbf{S} + \mathbf{S}^T = 0$, confermando così che $\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\mathbf{R}(\theta)^T$ è *skew-symmetric*.

Moltiplicando entrambi i membri per \mathbf{R} e ricordando l'ortogonalità allora risulta:

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta} = \mathbf{S}\mathbf{R}(\theta)$$

ossia *calcolare la derivata della matrice di rotazione \mathbf{R} equivale a moltiplicare la stessa \mathbf{R} per la matrice \mathbf{S} definita sopra.*

2.7 Conclusioni

In questo capitolo sono stati introdotti i concetti fondamentali riguardanti la meccanica dei corpi rigidi.

Nel secondo, terzo e quarto paragrafo sono state ricavate le matrici di rotazione attorno ai tre assi dello spazio $3D$ con le rispettive proprietà, quale strumento algebrico utilissimo nei problemi di robotica mobile. In particolare, nei seguenti capitoli verrà fatto un forte utilizzo dei concetti ricavati in questo paragrafo.

Nel quarto paragrafo sono state introdotte le trasformazioni omogenee, ricavando la matrice \mathbf{H} che descrive compiutamente un moto rigido.

Nel sesto paragrafo è stata definita la matrice *skew-simmetrica* e le proprietà algebriche che la caratterizzano, con cenni alle derivate delle matrici di rotazione.

Capitolo 3

Convenzione di

Denavit-Hartenberg, Inversa e differenziale

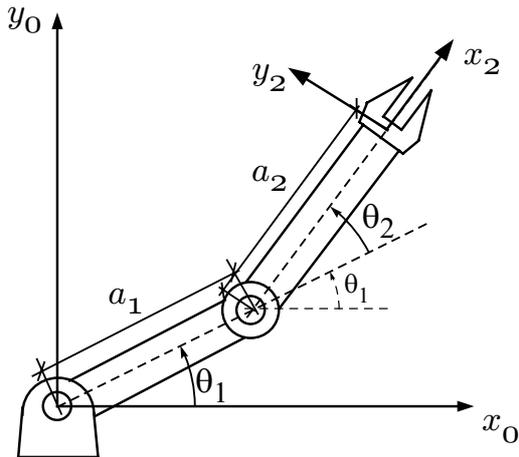
In questo capitolo verranno analizzati i principali problemi cinematici inerenti ai manipolatori utilizzati in ambito robotico. In particolare saranno trattati i seguenti argomenti:

- Cinematica Diretta
- Cinematica Inversa
- Cinematica Differenziale

Verrà dedicata inoltre un'ampia parte agli esercizi, utile strumento per una più approfondita comprensione degli argomenti di questo capitolo.

3.1 Cinematica Diretta

Un manipolatore è costituito da un insieme di corpi rigidi (*bracci*) connessi in cascata tramite coppie cinematiche o *giunti*. I giunti, come descritto nel Cap.1, possono essere fondamentalmente di due tipi: giunti di rotazione, o *rotoidali* e giunti di traslazione, o *prismatici*.



La struttura d'insieme forma la *catena cinematica*. Un estremo della catena è vincolato ad una base; all'altro è connesso l'organo terminale (*end-effector*) che consente la manipolazione di oggetti nello spazio.

La struttura meccanica di un manipolatore è caratterizzata da un numero di gradi di mobilità che ne determinano la configurazione. Ogni grado di mobilità viene tipicamente associato ad una articolazione di giunto e costituisce una *variabile di giunto*.

La **cinematica diretta** si occupa di determinare la posizione e l'orientamento dell'organo terminale del manipolatore, in funzione dei valori assunti dalle variabili di giunto.

Per fare ciò, come prima cosa, si fissa un sistema di coordinate, detto *sistema base* \mathcal{S}_0 . Così facendo è possibile esprimere anche le coordinate dell'end-effector nel sistema \mathcal{S}_0 .

Per ricavare la POSIZIONE dell' end-effector si scrive:

$$\begin{cases} x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

Invece la matrice che esprime l'ORIENTAMENTO del sistema \mathcal{S}_2 rispetto al sistema \mathcal{S}_0 risulta:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

3.1. Cinematica Diretta

Nel caso in cui si abbia un manipolatore a più gradi di libertà non è immediato ricavare le equazioni cinematiche. Gli strumenti che si usano sono pertanto:

1. Coordinate omogenee
2. Trasformazioni omogenee
3. Convenzione di Denavit-Hartenberg

3.1.1 Convenzione di Denavit-Hartenberg

Una catena cinematica in cui vi è una sola sequenza di bracci a connettere i due estremi della catena, viene detta *catena cinematica aperta*.

Per calcolare l'equazione cinematica diretta di questo tipo di catena è necessario delineare un metodo generale e sistematico per definire *posizione* e *orientamento* relativi di due bracci consecutivi; il problema è così ricondotto all'individuazione di terne solidali a ciascun braccio ed alla determinazione della trasformazione di coordinate che lega le due terne. È opportuno stabilire delle regole di scelta delle terne stesse per poter arrivare a scrivere una procedura sistematica.

Si consideri il caso indicato in figura: Detto i l'asse del giunto che connette il

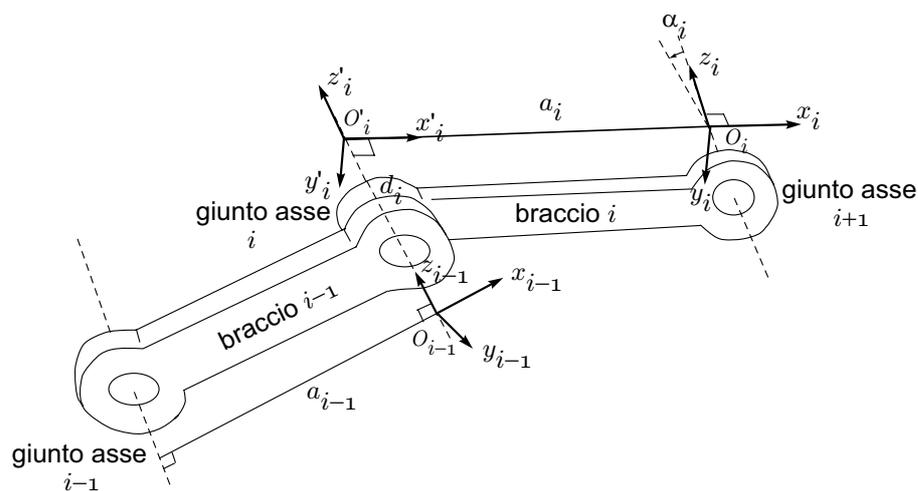


Figura 3.1: *Convenzione di Denavit-Hartenberg.*

braccio $i-1$ al braccio i , per definire la terna i (solidale al braccio i) si opera secondo la cosiddetta *Convenzione di Denavit-Hartenberg*:

1. Scegliere l'asse z_i lungo l'asse del giunto $i + 1$;
2. Si individua O_i come l'intersezione dell'asse z_i con la normale comune¹ agli assi z_{i-1} e z_i e con O'_i si indica l'intersezione della normale comune con z_{i-1} ;
3. Scegliere l'asse x_i diretto lungo la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i con verso considerato positivo se va dal giunto i al giunto $i + 1$;
4. Scegliere l'asse y_i ortogonalmente a quelli precedentemente ricavati.

É bene far notare che la convenzione di D-H fornisce una definizione non univoca della terna nei seguenti casi:

- rispetto alla *terna* 0 per la quale risulta specificata solamente la direzione di z_0 . O_0 e x_0 possono essere scelti arbitrariamente;
- rispetto alla *terna* n , dato che non esiste il giunto $n + 1$; z_n non è univocamente definito, mentre invece x_n va scelto ortogonale a z_{n-1} . Poichè in genere l'ultimo giunto è rotoidale, allora z_n è preso allineato con z_{n-1} ;
- quando due assi consecutivi sono paralleli;
- quando il giunto i -esimo è prismatico, nel qual caso solo la direzione di z_{i-1} è determinata.

Una volta definite le terne solidali ai bracci, la posizione e l'orientamento della terna i rispetto alla terna $i - 1$, sono completamente definiti anche i seguenti parametri:

a_i distanza di O_i da O'_i .

d_i coordinata su z_{i-1} di O'_i .

α_i angolo intorno all'asse x_i tra l'asse z_{i-1} e l'asse z_i valutato positivo in senso antiorario.

¹La normale comune tra due rette sghembe è la retta a cui appartiene il segmento di minima distanza tra le rette.

3.1. Cinematica Diretta

θ_i angolo intorno all'asse z_{i-1} tra l'asse x_{i-1} e l'asse x_i valutato positivo in senso antiorario.

I parametri a_i e α_i si suppone di conoscerli e sono costanti; dei rimanenti due, uno solo è variabile, a seconda del tipo di giunto che si utilizza per connettere il braccio $i-1$ con il braccio i ; difatti, se il giunto è *rotoidale*, allora la variabile risulta essere θ_i , mentre se il giunto è *prismatico*, allora la variabile è d_i .

Allora si può scrivere compiutamente ed in maniera sistematica la trasformazione di coordinate che lega la terna i alla terna $i-1$ seguendo i passi:

1. Si consideri una terna coincidente con la terna $i-1$;
2. Traslare la terna scelta di d_i lungo l'asse z_{i-1} ruotandola di θ_i attorno a z_{i-1} così da far coincidere la terna $i-1$ con la terna i' . Tale procedimento è sintetizzato dalla trasformazione omogenea:

$$\mathbf{A}_{i-1}^{i'} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Traslare la terna appena ottenuta di a_i lungo l'asse x_i' ruotandola di α_i intorno all'asse x_i' . Il tutto è così sintetizzabile algebricamente:

$$\mathbf{A}_{i'}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Avendo eseguito due trasformazioni di coordinate definite rispetto alla terna corrente, la trasformazione di coordinate complessiva si ottiene moltiplicando

le singole trasformazioni nel seguente modo:

$$\mathbf{A}_{i-1}^i(q_i) = \mathbf{A}_{i-1}^{i'} \mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Sinteticamente si può dire che un metodo automatico e molto veloce per scrivere la cinematica diretta di un manipolatore (in catena aperta) consiste nel ricavare prima di tutto le direzioni degli assi nel rispetto della convenzione di DH, estrpolarne i parametri α_i, a_i, d_i e θ_i costruendone una tabella e successivamente utilizzare la (3.1) per completare la cinematica diretta.

Nella sezione seguente verranno presentate alcune tipiche strutture robotiche di manipolazione nonchè i procedimenti da seguire per ricavarne la cinematica diretta.

3.1.2 Cinematica di alcuni manipolatori

Manipolatore planare a 2 bracci

Si supponga dato il manipolatore planare a due links; come detto nella teoria appena presentata, è necessario seguire alcuni precisi passi per applicare correttamente la convenzione di Denavit-Hartenberg.

Innanzitutto si devono fissare i sistemi di riferimento: dato che ogni giunto è *rotoidale*, allora le z_i vengono prese lungo gli assi dei giunti. La terna base viene scelta arbitrariamente (a meno di z_0). L'asse x_1 viene scelto lungo il prolungamento del link 1 e così l'asse x_2 viene scelto lungo il prolungamento del link 2. GLi assi y_i completano la terna levogira. Il manipolatore ed i rispettivi sistemi di riferimento, con le variabili di giunto, sono rappresentati in Fig.3.2.

Qui di seguito viene riportata la tabella con i parametri di Denavit-Hartenberg.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2

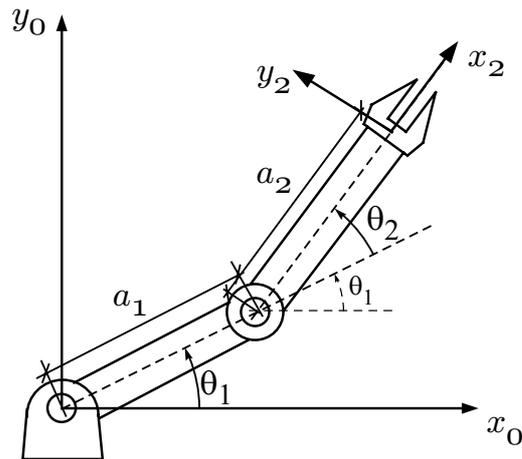


Figura 3.2: Esempio Es. 3.1.2

Secondo la formula riportata in (3.1) è possibile calcolare \mathbf{A}_1^2 nel seguente modo:

$$\mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} & -s_{\theta_2} & 0 & a_2 c_{\theta_2} \\ s_{\theta_2} & c_{\theta_2} & 0 & a_2 s_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} & -s_{\theta_1} & 0 & a_1 c_{\theta_1} \\ s_{\theta_1} & c_{\theta_1} & 0 & a_1 s_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi, eseguendo i conti...

$$\mathbf{A}_0^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2 c_{12} + a_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2 s_{12} + a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polso Sferico

Si consideri il manipolatore rappresentato in figura. Si dispongono i sistemi di riferimento secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg: l'asse z_3 , lungo il giunto 1 è ortogonale a x_4 . z_4 è orientato lungo l'asse del secondo giunto e, analogamente, anche l'asse z_5 . In tal modo è possibile ricavare la tabella dei parametri di DH come

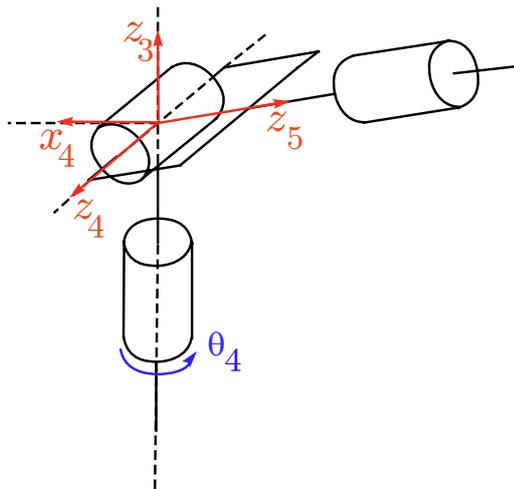


Figura 3.3: Esempio Es. ??

segue:

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	0	0	θ_6

Risulta allora che:

$$\mathbf{A}_5^4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_7^6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eseguendo la moltiplicazione

$$\mathbf{T}_3^7 = \mathbf{A}_5^4 \mathbf{A}_6^5 \mathbf{A}_7^6$$

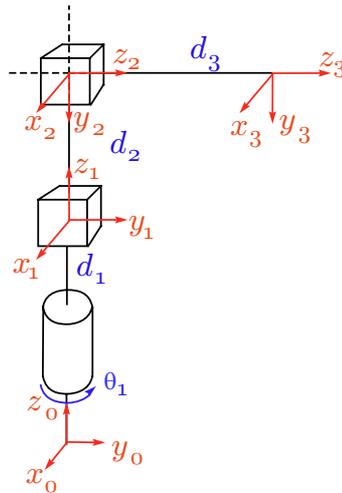


Figura 3.4: Esempio Es. 3.1.2

si ottiene la cinematica diretta per il polso sferico.

Manipolatore Cilindrico

Si consideri il manipolatore cilindrico di figura. Dopo aver assegnato l'orientamento degli assi secondo la regola di DH, è possibile scrivere la *cinematica diretta* \mathbf{T}_0^3 . L'asse z_0 viene scelto in modo da essere orientato lungo l'asse di rotazione del giunto rotoidale alla base. L'asse z_1 è scelto lungo il giunto prismatico (così come lo è lo z_2). Gli assi x_i sono scelti in modo da essere perpendicolari a z_i . A questo punto è possibile costruire la matrice dei parametri di DH:

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1^*
2	0	$-\pi/2$	d_2^*	0
3	0	0	d_3^*	0

Si ricorda che α_i è l'angolo di rotazione dall'asse z_{i-1} verso z_i lungo x_i .

La matrice \mathbf{A}_0^1 può essere così scritta:

$$\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

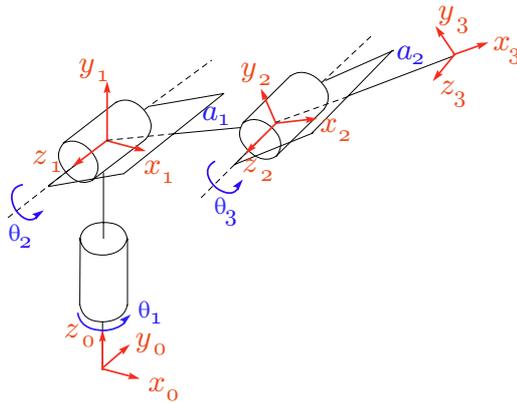


Figura 3.5: Esempio Es. 3.1.2

Analogamente

$$\mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore S.C.A.R.A

Manipolatore Antropomorfo

Si consideri il manipolatore antropomorfo (polso sferico escluso) raffigurato in Fig.3.5. Dopo aver assegnato l'orientamento dei sistemi di riferimento sulla base della convenzione di Denavit-Hartenberg, se ne vuole calcolare la cinematica diretta \mathbf{T}_0^3 . Il manipolatore antropomorfo è costituito da tre giunti rotoidali e quindi ha 3 gradi di libertà. L'asse z_0 viene scelto lungo il giunto 1 secondo la direzione di rotazione. Analoga scelta viene fatta per gli altri giunti. Gli altri assi sono scelti come indicato in figura poichè la regola prevede che *gli assi x_1 e z_0 siano ortogonali e che l'asse*

3.1. Cinematica Diretta

x_2 sia orientato verso lungo il braccio precedente. Si completano successivamente secondo la regola della mano destra.

A questo punto è possibile trovare i parametri di D-H, indicati nella seguente tabella.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\pi/2$	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_2

É bene ricordare che α_i è l'angolo intorno all'asse x_i , tra z_{i-1} e z_i (scelto “muovendosi” da z_i a z_{i-1} lungo x_i), mentre a_i è la distanza di O_i da O'_i .

Utilizzando a questo punto la semplicissima (3.1) è possibile scrivere compiutamente le matrici di trasformazione \mathbf{A}_0^1 , \mathbf{A}_1^2 e \mathbf{A}_2^3 .

$$\mathbf{A}_2^3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_3} & -s_{\theta_3}c_{\alpha_3} & s_{\theta_3}s_{\alpha_3} & a_3c_{\theta_3} \\ s_{\theta_3} & c_{\theta_3}c_{\alpha_3} & -c_{\theta_3}s_{\alpha_3} & a_3s_{\theta_3} \\ 0 & s_{\alpha_3} & c_{\alpha_3} & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} & -s_{\theta_2} & 0 & a_2c_{\theta_2} \\ s_{\theta_2} & c_{\theta_2} & 0 & a_2s_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} & 0 & s_{\theta_1} & 0 \\ s_{\theta_1} & 0 & -c_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eseguendo il prodotto tra le tre matrici appena trovate è possibile trovare la matrice \mathbf{T}_0^3 che definisce la cinematica diretta per un manipolatore antropomorfo.

Polso Sferico

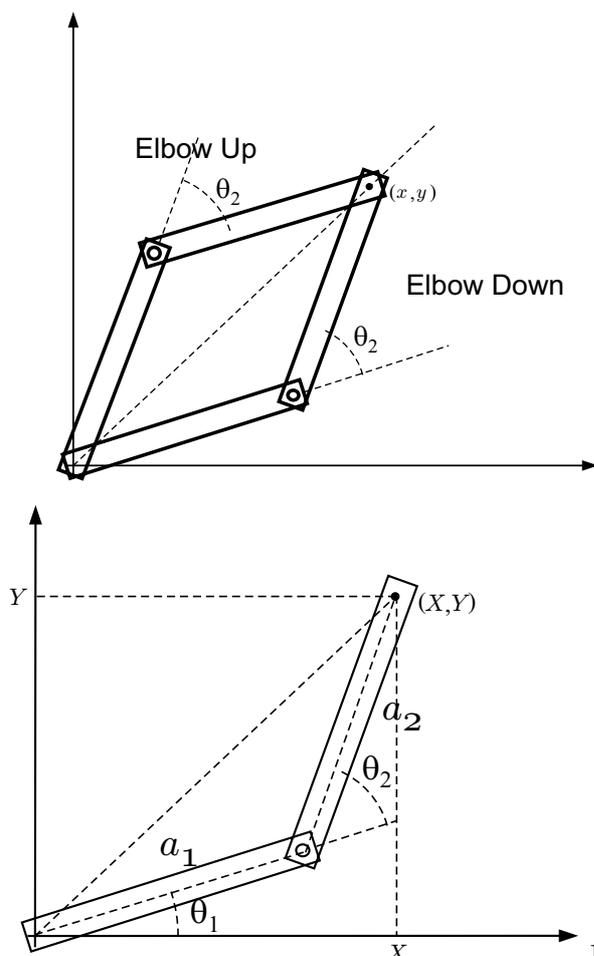
Manipolatore di Stanford

Manipolatore Cilindrico con polso sferico

3.2 Cinematica Inversa

Introducendo il problema cinematico inverso, si vuole qua ricordare che esso consiste nello studio di alcune proprietà e tecniche di calcolo per ottenere informazioni utili sulle variabili di giunto θ_i una volta nota la posizione dell'end-effector nello spazio.

La soluzione di questo problema può non esistere o ve ne possono addirittura essere infinite; su questa affermazione ritorneremo più avanti. Nel frattempo la si può comprendere se si considera il meccanismo a 2 bracco indicato in figura:



É evidente che, date le coordinate (x, y) dell'end-effector esistono due *diverse* variabili di giunto θ_1 e θ_2 che mi portano in quella posizione.

Questo problema provoca indeterminazione.

Per capire analiticamente il problema si consideri a tal proposito il caso indicato in figura sottostante:

Dalla trigonometria è noto che

$$X^2 + Y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\theta_2)$$

3.3. Cinematica Differenziale

per cui

$$\cos(\theta_2) = \frac{X^2 + Y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \equiv D$$

e quindi

$$\theta_2 = \cos^{-1}(-D) \quad \text{e} \quad \sin(\theta_2) = \pm\sqrt{1 - D^2}$$

e quindi $\theta_2 = \tan^{-1} \pm \frac{\sqrt{1-D^2}}{D}$ ove il segno \pm sta ad indicare proprio la configurazione di tipo *Elbow Up* o *Elbow Down*.

Ricapitolando, quindi, mentre il problema della CINEMATICA DIRETTA ha sempre **una** soluzione che è ottenuta semplicemente risolvendo le equazioni dirette, il problema della CINEMATICA INVERSA **può o non può avere soluzione** e, se tale soluzione esiste, **può non essere unica**. Inoltre queste equazioni sono funzioni non lineari molto complicate nelle variabili dei giunti e le soluzioni sono difficili da ottenere in forma analitica.

In genere il problema della cinematica inversa può essere così sintetizzabile:

$$q_k = F_k(h_{11}, \dots, h_{ij}, \dots) \quad k = 1, \dots, n$$

ove f_k è una funzione non lineare. A partire da questo si vuole poter risolvere il problema in forma chiusa; questa esigenza è di fondamentale importanza poichè nel controllo di bracci robotici i tempi dovuti all'utilizzo di algoritmi di stima possono rallentare e addirittura alterare le prestazioni del controllore.

3.3 Cinematica Differenziale

La cinematica differenziale si occupa di relazionare le velocità dei giunti con quella dell'end-effector.

La soluzione di questo problema viene di solito data sotto forma di una matrice, detta *Jacobiano del manipolatore*. Si considerino, ad esempio, le equazioni viste per la cinematica di un manipolatore planare a due bracci:

$$\begin{cases} x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

Derivando in funzione del tempo (sia θ_i che x e y sono funzioni del tempo t) risulta:

$$\dot{x} = -a_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y} = a_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

ed usando la notazione vettoriale risulta $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$ si può passare

alla forma matriciale:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 \sin \theta_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}}_{\text{Jacobiano J}} \dot{\theta} = \mathbf{J} \dot{\theta}$$

Ma a questo punto è possibile concludere che

$$\dot{\theta} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{x}}$$

Ma \mathbf{J} è invertibile? Eseguendo i conti si ottiene che:

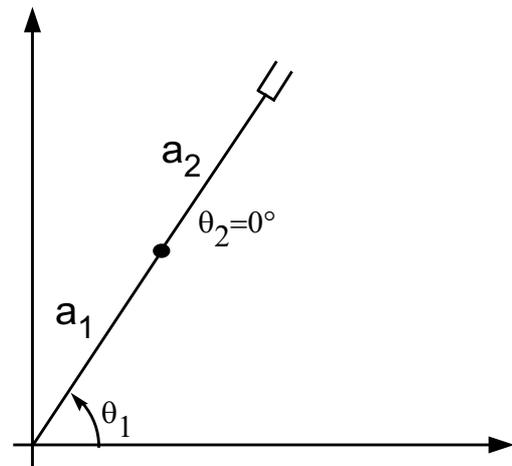
$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{a_1 a_2 \sin \theta_2} \begin{bmatrix} a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -a_1 \cos \theta_1 - a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -a_1 \sin \theta_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

ove il determinante dello Jacobiano è $\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 \sin \theta_2$ che si annulla per $\theta_2 = 0, \pi$.

In questo caso si dice che il manipolatore si trova in una configurazione SINGOLARE.

In questa configurazione non è più possibile passare da un vettore $\dot{\mathbf{x}}$ al corrispondente vettore derivato degli stati tramite la \mathbf{J}^{-1} e si dice che il manipolatore *perde un grado di libertà*.

Ciò vuol dire che sono preclusi alcuni movimenti al manipolatore stesso, come indicato in Figura.



3.3.1 Velocità angolare & accelerazione

Sia data una matrice \mathbf{R} di rotazione variabile nel tempo, ovvero:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) \in SO(3) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per quanto visto nel Capitolo 2, si può affermare che:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{S}\mathbf{R}(t) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{R}(t)$$

3.3. Cinematica Differenziale

Poichè $\mathbf{S}(t)$ è *skew-simmetrica* allora è possibile rappresentarla come $\mathbf{S}(\omega(t))$ per un unico vettore $\omega(t)$ che è la **velocità angolare** della struttura rotante rispetto al sistema fissato al tempo t .

Esempio:

Si supponga che $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_{x,\theta(t)}$. Allora $\dot{\mathbf{R}}(t) = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ è calcolato come

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{R}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\mathbf{S}(t)\mathbf{R}(t) = \mathbf{S}(\omega(t))\mathbf{R}(t)$$

dove $\omega = \mathbf{i}\dot{\theta} \equiv$ "Velocità angolare intorno all'asse x ".

Sia \mathbf{p}_1 un punto rappresentante un vettore fissato in un sistema \mathcal{S}_1 ruotato rispetto al sistema \mathcal{S}_0 .

Le coordinate di \mathbf{p}_1 in \mathcal{S}_0 sono date da:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}(t)\mathbf{p}_1 \rightarrow \text{"coordinate di } \mathbf{p}_1 \text{ in } \mathcal{S}_0\text{"}$$

La velocità $\dot{\mathbf{p}}_0$ è data da:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_0 &= \mathbf{S}(\omega)\mathbf{R}(t)\mathbf{p}_1 \\ &= \mathbf{S}(\omega)\mathbf{p}_0 \\ &= \omega \times \mathbf{p}_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Generalizzando il movimento della struttura \mathcal{S}_1 relativamente a \mathcal{S}_0 si suppone che la trasformazione omogenea che lega due sistemi sia del tipo:

$$\mathbf{H}_0^1(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1(t) & \mathbf{d}_0^1(t) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Omettendo per semplicità l'argomento t e gli apici e pedici sia di \mathbf{R}_0^1 che di \mathbf{d}_0^1 ...

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{R}\mathbf{p}_1 + \mathbf{d} \\ &\downarrow \\ \dot{\mathbf{p}}_0 &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{p}_1 + \dot{\mathbf{d}} \\ &= \mathbf{S}(\omega)\mathbf{R}\mathbf{p}_1 + \dot{\mathbf{d}} \\ &= \omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{3.3}$$

ove $\mathbf{r} = \mathbf{R}\mathbf{p}_1$ è il vettore da O_1 a \mathbf{p} espresso in \mathcal{S}_0 , mentre $\mathbf{v} \equiv$ “velocità a cui si muove O_1 ”.

A questo punto è possibile anche derivare l’espressione dell’accelerazione relativa per i due sistemi in gioco:

1° Il prodotto vettoriale soddisfa alle regole di derivazione del prodotto, per cui risulta:

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt}$$

e ricordando quanto ricavato precedentemente

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{p}_1 + \dot{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}$$

allora

$$\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\mathbf{p}_1$$

↓ D

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_0 - \ddot{\mathbf{d}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}\mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}\mathbf{p}_1 \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

↓

$$\ddot{\mathbf{p}}_0 = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}}_{\text{Accel. Trasversale}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\text{Accel. Centripeta}} + \underbrace{\ddot{\mathbf{d}}}_{\text{Accel. Lineare}}$$

(3.4)

3.3.2 Addizione di velocità angolari

In alcuni casi si è interessati a trovare le *velocità angolari risultanti* dovute alla rotazione relativa di differenti sistemi di coordinate.

Dati allora due sistemi di riferimento \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 relativamente ad un sistema fissato.

Dato quindi un punto \mathbf{p} con rappresentazione $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, nei rispettivi sistemi si hanno le relazioni seguenti:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_1^2$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_0^2$$

3.3. Cinematica Differenziale

dove $\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2$ e $\mathbf{d}_0^2 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{R}_0^1 \mathbf{d}_1^2$

É importante sottolineare che tutte queste quantità sono funzioni del tempo!

Derivando entrambi i membri:

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2$$

che produce

$$\dot{\mathbf{R}}_0^2 = \underbrace{\dot{\mathbf{R}}_0^1 \mathbf{R}_1^2}_{(a)} + \underbrace{\mathbf{R}_0^1 \dot{\mathbf{R}}_1^2}_{(b)}$$

Sapendo che la (a) è pari a $\mathbf{S}(\omega_0^1) \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 = \mathbf{S}(\omega_0^1) \mathbf{R}_0^2$ e che (b) è così scrivibile:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0^1 \dot{\mathbf{R}}_1^2 &= \mathbf{R}_0^1 \mathbf{S}(\omega_1^2) \mathbf{R}_1^2 \\ &= \mathbf{R}_0^1 \mathbf{S}(\omega_1^2) \mathbf{R}_0^{1T} \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{R}_0^1 \omega_1^2) \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{R}_0^1 \omega_1^2) \mathbf{R}_0^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ma allora ricombinando i due risultati nell'equazione iniziale si ottiene:

$$\mathbf{S}(\omega_0^2) \mathbf{R}_0^2 = [\mathbf{S}(\omega_0^1) + \mathbf{S}(\mathbf{R}_0^1 \omega_1^2)] \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2$$

ma poichè vale la proprietà $\mathbf{S}(\mathbf{a}) + \mathbf{S}(\mathbf{a}) = \mathbf{S}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ allora in definitiva si ottiene

$$\omega_0^2 = \omega_0^1 + \mathbf{R}_0^1 \omega_1^2 \tag{3.6}$$

La (3.6) sta ad indicare che le *velocità angolari possono essere addizionate una volta espresse relativamente al medesimo sistema di coordinate.*

L'espressione generale per un qualsiasi numero di sistemi di coordinate è la seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0^n &= \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \cdot \dots \cdot \mathbf{R}_{n-1}^n \\ &= \mathbf{S}(\omega_0^n) \mathbf{R}_0^n \end{aligned} \tag{3.7}$$

e ove

$$\omega_0^n = \omega_0^1 + \mathbf{R}_0^1 \omega_1^2 + \mathbf{R}_0^2 \omega_2^3 + \dots + \mathbf{R}_0^{n-1} \omega_{n-1}^n$$

3.4 Lo Jacobiano di manipolatori

3.4.1 Derivazione dello Jacobiano

Nel caso di trasformazioni omogenee \mathbf{H} era stata ricavata la seguente espressione:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^n & \mathbf{d}_0^n \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

ove è possibile anche scrivere

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0^n = \mathbf{A}_1(\mathbf{q}_1) \dots \mathbf{A}_n(\mathbf{q}_n)$$

ove ogni trasformazione omogenea è nella forma

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-1}^i & \mathbf{d}_{i-1}^i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathbf{T}_i^j = \mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^j & \mathbf{d}_i^j \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

ove, è bene ricordare,

$$\mathbf{R}_i^j = \mathbf{R}_i^{i+1} \dots \mathbf{R}_{j-1}^j \quad \text{e} \quad \mathbf{d}_i^j = \mathbf{d}_i^{j-1} + \mathbf{R}_i^{j-1} \mathbf{d}_{j-1}^j$$

Si consideri adesso un manipolatore ad n bracci, con $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ le variabili di giunto, e sia

$$\mathbf{T}_0^n(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^n(\mathbf{q}) & \mathbf{d}_0^n(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice di trasformazione che esprime punti riferiti al sistema end-effector, nel sistema base.

Un'osservazione importante è che, potendo il robot muoversi, sia le variabili di giunto \mathbf{q}_i che la posizione dell'end-effector \mathbf{d}_0^n che la sua orientazione \mathbf{R}_0^n , saranno funzione del tempo.

È possibile definire il vettore della **velocità angolare** dell'end-effector ω_0^n :

$$\mathbf{S}(\omega_0^n) = \dot{\mathbf{R}}_0^n (\mathbf{R}_0^n)^T$$

3.4. Lo Jacobiano di manipolatori

e si indichi con $\mathbf{v}_0^n = \dot{\mathbf{d}}_0^n$ la velocità lineare dell'end-effector.

Lo scopo di questo capitolo è trovare una relazione lineare della forma

$$\mathbf{v}_0^n = \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{q}} \omega_0^n = \mathbf{J}_\omega \dot{\mathbf{q}} \quad (3.8)$$

ove \mathbf{J}_v e \mathbf{J}_ω sono matrici $3 \times n$. In forma compatta è possibile scrivere:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^n \\ \omega_0^n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_0^n \dot{\mathbf{q}}$$

ove chiaramente

$$\mathbf{J}_0^n = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ - \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix}$$

La matrice \mathbf{J}_0^n viene chiamata **Jacobiano di manipolatore** o ,semplicemente, **Jacobiano**.

Si noti che \mathbf{J}_0^n è una matrice $6 \times n$ ove n è il numero di bracci.

3.4.2 Velocità Angolare

Per quanto ricavato in (??) è bene ricordare che le velocità angolari possono essere addizionate vettorialmente solo nel caso in cui siano espresse relativamente ad un comune sistema di coordinate.

Ptrebbe essere possibile determinare la velocità angolare dell'end-effector relativamente alla base esprimendo la velocità angolare di ciascun braccio nel sistema di riferimento base, e poi sommarle.

Se il giunto i -esimo è di tipo rotazionale, allora la variabile di giunto equivale a θ_i . Allora la velocità angolare del braccio i espressa nel frame $i - 1$ è data da:

$$\omega_{i-1}^i = \mathbf{q}_i \mathbf{k}$$

Se invece il joint è prismatico, allora il moto del frame i relativamente al frame $i - 1$ è una traslazione:

$$\omega_{i-1}^i = \mathbf{0};$$

Se si considera la proprietà di addizione delle velocità angolari (??rif) è possibile far vedere che la velocità angolare complessiva dell'end-effector è data da:

$$\begin{aligned}\omega_0^n &= \rho_1 \dot{q}_1 \mathbf{k} + \rho_2 \dot{q}_2 R_0^1 \mathbf{k} + \dots + \rho_n \dot{q}_n R_0^{n-1} \mathbf{k} \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_i \dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1}\end{aligned}\tag{3.9}$$

ove

$$\mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{R}_0^{i-1} \mathbf{k}$$

e dove $\rho_i = 1$ se il giunto i -esimo è rotazionale, altrimenti (se prismatico) è pari a zero.

É naturale che $\mathbf{z}_0 = \mathbf{k} = [0, 0, 1]^T$.

In base a ciò è possibile concludere che

$$\mathbf{J}_\omega = [\rho_1 \mathbf{z}_0, \dots, \rho_n \mathbf{z}_{n-1}]\tag{3.10}$$

3.4.3 Velocità Lineare

La velocità lineare dell' end-effector è semplicemente data da $\dot{\mathbf{d}}_0^n$. In base alla regola di derivazione a catena si ottiene:

$$\dot{\mathbf{d}}_0^n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{d}_0^n}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Quindi la i -esima colonna di \mathbf{J}_v è dato da $\frac{\partial \mathbf{d}_0^n}{\partial q_i}$.

Si considerino adesso due casi:

- **Caso I**

Se il giunto i è di tipo *prismatico*, allora \mathbf{R}_0^{j-1} è indipendente da $q_i = d_i$ per tutti i j e quindi risulta:

$$\mathbf{d}_{i-1}^i = d_i \mathbf{k} + R_{i-1}^i a_i \mathbf{i}$$

3.4. Lo Jacobiano di manipolatori

Se tutti i giunto sono fissi, tranne l' i -esimo, allora:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{d}}_0^n &= R_0^{i-1} \dot{\mathbf{d}}_{i-1}^i \\
 &= \dot{d}_i R_0^{i-1} \mathbf{k} \\
 &= \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Ma allora

$$\frac{\partial \mathbf{d}_0^n}{\partial q_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

• Caso II

Se il giunto è *rotoidale*, indicando con \mathbf{o}_k il vettore \mathbf{d}_0^k dall'origine o_0 all'origine o_k , allora

$$\mathbf{d}_0^n = \mathbf{d}_0^{i-1} + \mathbf{R}_0^{i-1} \mathbf{d}_{i-1}^n$$

oppure, nella nuova notazione:

$$\mathbf{o}_n - \mathbf{o}_{i-1} = R_0^{i-1} \mathbf{d}_{i-1}^n$$

Osservando la Fig.3.6 si può notare che nel caso in cui l'unico giunto ad essere

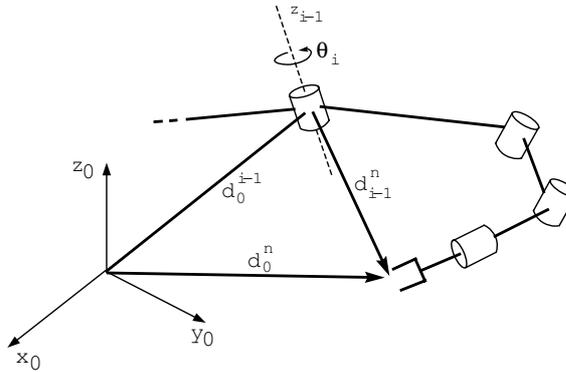


Figura 3.6: *Spostamento dell'end-effector a causa del moto di i .*

attuato sia l' i -esimo, allora sia \mathbf{d}_0^{i-1} che R_0^{i-1} sono costanti. Quindi derivando la $\dot{\mathbf{d}}_0^n$ si ottiene $\dot{\mathbf{d}}_0^n = R_0^{i-1} \dot{\mathbf{d}}_{i-1}^n$ e poichè il moto del link i avviene attorno all'asse z_i allora risulta:

$$\dot{\mathbf{d}}_{i-1}^n = \dot{q} \mathbf{k} \times \mathbf{d}_{i-1}^n$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{d}}_0^n &= R_0^{i-1}(\dot{q}_i \mathbf{k} \times \mathbf{d}_{i-1}^n) \\
 &= \dot{q}_i R_0^{i-1} \mathbf{k} \times R_0^{i-1} \mathbf{d}_{i-1}^n \\
 &= \dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{o}_n - \mathbf{o}_{i-1})
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Quindi:

$$\frac{\partial \mathbf{d}_0^n}{\partial q_i} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{o}_n - \mathbf{o}_{i-1}) \tag{3.13}$$

e la metà superiore dello jacobiano \mathbf{J}_v è data da:

$$\mathbf{J}_v = [J_{v_1} \cdots J_{v_n}]$$

ove

$$J_{v_i} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{o}_n - \mathbf{o}_{i-1}) \quad \text{se giunto rotazionale}$$

oppure

$$J_{v_i} = \mathbf{z}_{i-1} \quad \text{se giunto prismatico}$$

Volendo sintetizzare quanto finora ricavato, si può dire che:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_n]$$

dove la i -esima colonna è data da:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{o}_n - \mathbf{o}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}$$

se il giunto è **rotoidale**, mentre:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

se il giunto i è prismatico.

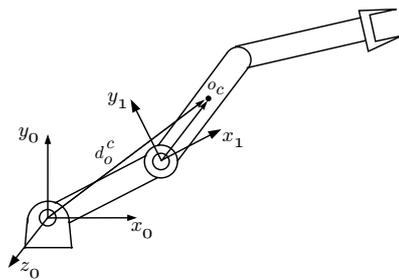
Le formule appena ricavate dimostrano così tutta la loro efficacia, sia in termini di facilità di scrittura dello Jacobiano sia in termini di calcolo dei valori necessari: difatti \mathbf{z}_i è data dai primi tre elementi della terza colonna di \mathbf{T}_0^i , mentre \mathbf{o}_i è dato

3.4. Lo Jacobiano di manipolatori

dai primi tre elementi della quarta colonna di \mathbf{T}_0^i . Cioè non è necessario, ai fini del calcolo dello Jacobiano, conoscere tutta la matrice \mathbf{T} ma solamente le ultime colonne!

Esempio:

Si consideri il manipolatore a tre bracci rappresentato nella figura di sinistra:



Si voglia calcolare la velocità lineare \mathbf{v} e quella angolare ω del centro o_c del braccio 2. Come è noto risulta che:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{bmatrix} = [\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_3] \dot{\mathbf{q}}$$

ove, per quanto ricavato precedentemente si ha:

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{o}_c - \mathbf{o}_0)$$

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{o}_c - \mathbf{o}_1)$$

$$\mathbf{J}_3 = \mathbf{0}$$

poichè la velocità del secondo braccio non è affetta dal moto del terzo link. Δ